

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 11 (Abgabe spätestens 10.01.2025, 8:00)

Aufgabe 58

(6 Punkte)

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ wie in Aufgabe 57 und $U = \text{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \subset \mathbb{R}^3$.

- Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das kanonische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^3 und die zugehörige Norm.
Bestimmen Sie mithilfe von Gram-Schmidt eine ONB von U .
- Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das Skalarprodukt aus Aufgabe 56e und die zugehörige Norm.
Bestimmen Sie mithilfe von Gram-Schmidt eine ONB von U .

Aufgabe 59

(keine Abgabe)

Gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ für beliebige $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 60

(4+4+2 = 10 Punkte)

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Wir betrachten das LGS

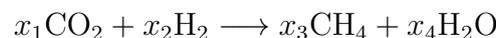
$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 = \vec{b} \quad \text{für } x_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3.$$

- Bilden Sie auf beiden Seiten der Gleichung das Kreuzprodukt mit \vec{a}_2 . Bilden Sie anschließend das Skalarprodukt des Ergebnisses mit \vec{a}_3 . Lösen Sie nun – wenn möglich – nach x_1 auf.
- Beschaffen Sie sich analoge Lösungsformeln für x_2 und x_3 .
- Welche Bedingung müssen die \vec{a}_j erfüllen, damit wir mithilfe der Formeln aus (a) und (b) wirklich die Lösung des LGS erhalten?

Aufgabe 61

(10 Zusatzpunkte)

Formulieren Sie für jede der chemischen Reaktionen



(für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$) ein lineares Gleichungssystem für die Werte x_i bzw. y_j aus der Bedingung, dass auf beiden Seiten des Reaktionspfeils dieselbe Anzahl von H-, C- und O-Atomen stehen. Bestimmen Sie die jeweilige Lösungsmenge und darin die Teilmenge derjenigen Lösungen, bei denen alle x_i bzw. y_j positive ganze Zahlen sind.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!