Universität Tübingen, Fachbereich Mathematik
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 24/25

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 10 (Abgabe spätestens 20.12.2024, 8:00)

Aufgabe 52 (5 Zusatzpunkte)
Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

$$\begin{pmatrix} \beta^2 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 53 (keine Abgabe)
Seien U und V Unterräume des $\mathbb{R}^{10}$ mit $\dim U = 7$ und $\dim V = 4$ und Basen $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_7$ von U und $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_4$ von V. Welche Werte kann

$$\dim \operatorname{span}\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_7, \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_4\right)$$

annehmen (mit Begründung)? Geben Sie für jeden Fall explizit ein Beispiel an!

Aufgabe 54 (12 Zusatzpunkte)
Geben Sie für alle Vektorräume aus den Aufgaben 46 und 47 die Dimension und eine Basis an.

Aufgabe 55 (10 Zusatzpunkte)
Sei $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \mathrm{e}^x$, $f_3(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $f_4(x) = \sin x$ und $f_5(x) = \cos x$. Dann ist $V = \operatorname{span}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ ein Unterraum von $C(\mathbb{R})$ mit $\dim V = 5$. Sei $L : V \to V$ definiert durch $L(f) = f + f''$. Sind die Mengen

$$U_1 := \{f \in V \mid L(f) = 0\} \qquad \text{und} \qquad U_2 := \{g \in V \mid \exists\, f \in V \text{ mit } L(f) = g\}$$

Unterräume von V? Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

Aufgabe 56 (14 Punkte)
Überprüfen Sie, ob durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jeweils ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

a) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 7a_1b_1 + 3a_2b_2 + 5a_3b_3$

c) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 - a_2b_2$

d) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$

e) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 + 3a_2b_2 + a_3b_3 - a_2b_3 - a_3b_2$

Hinweis: Die Eigenschaften (S1) und (S2) können Sie für alle Aufgabenteile gleichzeitig überprüfen, denn alle Abbildungen haben die Form $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_j \sum_k \mu_{jk} a_j b_k$ mit $\mu_{kj} = \mu_{jk}$.

Aufgabe 57 (12 Punkte)

Seien

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \ \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

a) Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ und die zugehörige Norm.
Berechnen Sie die Normen $\|\vec{a}_j\| = |\vec{a}_j|$, $j = 1, 2, 3$
und alle Skalarprodukte $\langle \vec{a}_j, \vec{a}_k \rangle = \vec{a}_j \cdot \vec{a}_k$, $j \neq k$.

b) Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das Skalarprodukt aus Aufgabe 56e und die zugehörige Norm.
Berechnen Sie die Normen $\|\vec{a}_j\|$, $j = 1, 2, 3$
und alle Skalarprodukte $\langle \vec{a}_j, \vec{a}_k \rangle$, $j \neq k$.