

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 9 (Abgabe spätestens 13.12.2024, 8:00)

Aufgabe 44

(10 Punkte)

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f_{ab} definiert durch

$$f_{ab}(x) = \frac{e^{-bx^2} \cos(ax)}{1 + x^4}$$

bei Null ein Maximum, für welche ein Minimum? Begründen Sie Ihre Antwort!

HINWEIS: Berechnen Sie keine Ableitungen, verwenden Sie Taylorentwicklungen.

Aufgabe 45

(10 Zusatzpunkte)

Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - x|x| + 4x + 1}{2x}.$$

für reelle x . Achten Sie dabei insbesondere auf den (maximalen) Definitionsbereich, stetige Fortsetzbarkeit, Asymptoten, Nullstellen sowie Hoch- und Tiefpunkte, und zeichnen Sie die den Graph der Funktion.

Aufgabe 46

(12 Punkte)

Welche der folgenden Mengen M sind Vektorräume über \mathbb{R} ?¹

d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 24x_1, x_1 - x_3 = x_2 \right\}$

e) $M = \{\text{Polynome vom Grad } \leq 4 \text{ mit reellen Koeffizienten und Steigung } 24 \text{ im Ursprung}\}$

f) $M = \{\text{Polynome vom Grad } \leq 4 \text{ mit reellen Koeffizienten und einer Nullstelle bei } 24\}$

Aufgabe 47

(keine Abgabe)

Welche der folgenden Mengen M sind Vektorräume über K ?

a) $M = \mathbb{C}^2, K = \mathbb{R}$

b) $M = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{C}$

c) $M = \mathbb{Q}, K = \mathbb{R},$

¹Überlegen Sie nur, ob aus $\vec{x}, \vec{y} \in M$ folgt, dass auch $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in M \forall \lambda, \mu \in K$. Die Rechenregeln bekommen wir geschenkt. (Warum?)

Aufgabe 48

(keine Abgabe)

Die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, genannt $C([a, b])$, ist ein Vektorraum über den reellen Zahlen. Für $x \in [-\pi, \pi]$ sei $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos x$ und $f_4(x) = \cos^2(\frac{x}{2})$. Zeigen Sie:

- a) f_1, f_3, f_4 sind linear abhängig in $C([-\pi, \pi])$.
 b) f_1, f_2, f_3 sind linear unabhängig in $C([-\pi, \pi])$.

Aufgabe 49²

(keine Abgabe)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren aus \mathbb{R}^3 linear unabhängig sind, und stellen Sie – falls möglich – den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination dieser Vektoren dar.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

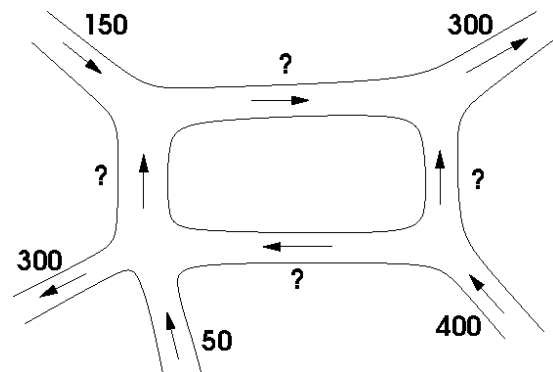
c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 50

(keine Abgabe)

Rechts ist der Ausschnitt eines Stadtplans gezeigt, in dem nur Einbahnstraßen zu sehen sind. An jedem Straßenabschnitt wurde eingetragen, wieviele Autos dort während einer bestimmten Zeit entlang gefahren sind. Wir nehmen an, dass alle Autos ihre Fahrt außerhalb des Ausschnitts begonnen und beendet haben.



Was können Sie über die Anzahlen der Autos sagen, die die vier mit Fragezeichen markierten Straßen benutzten? Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem auf, bringen Sie dieses auf Zeilenstufenform und geben Sie die Lösungsmenge an. Geben Sie außerdem für jede der vier Straßen die größt- und die kleinstmögliche Zahl an Autos an.

HINWEIS: Zur besseren Vergleichbarkeit bezeichnen Sie bitte die Anzahl der Autos auf den vier Straßen im Uhrzeigersinn mit x_1, \dots, x_4 beginnend mit der unteren.

Aufgabe 51

(8 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 02.02.2025 auf www.khanacademy.org die Skills

- *Subtract vectors,*
- *Combined vector operations,*
- *Number of solutions to a system of equations algebraically* und
- *Systems of equations word problems.*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).

²Diese Aufgabe wird nicht in den Übungsgruppen besprochen. Sie dürfen aber gerne Fragen auf Discord stellen und Ihre Lösung mit https://youtu.be/INZRd_JzGBM vergleichen.