

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung als Ersatz für die Vorlesung am 08.01.25

5.7 Geraden und Ebenen

Geraden in \mathbb{R}^2 können wir entweder durch

- ▶ zwei Punkte oder
- ▶ einen Punkt und die Richtung der Geraden oder
- ▶ einen Punkt und die Richtung senkrecht zur Geraden

festlegen.

$$\text{https://youtu.be/4PeLewXT9VQ (9 min)} \quad (1)$$

Analog legen wir Ebenen in \mathbb{R}^3 entweder durch

- ▶ drei Punkte oder
- ▶ einen Punkt und zwei (l.u.) Richtung in der Ebene oder
(zwei Punkte und eine Richtung in der Ebene oder)
- ▶ einen Punkt und die Richtung senkrecht zur Ebene

fest.

$$\text{https://youtu.be/a_hFRThkSq8 (5 min)} \quad (2)$$

Beispiel: Die beiden folgenden Parameterdarstellungen beschreiben die gleiche Ebene.

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} t, \quad s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ E_2 &= \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad s, t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

Hätten Sie das gesehen – oder auch nur vermutet? Wieso oder wieso nicht?

Überlegen Sie, bevor Sie das nächste Video anschauen, wie Sie das zeigen würden.

$$\text{https://youtu.be/lXIE8WSx9HM (6 min)} \quad (4)$$

5.8 Kurven und spezielle Koordinatensysteme

Polarkoordinaten in \mathbb{R}^2 kennen wir bereits von der Polardarstellung komplexer Zahlen. Das geht auch ohne i !

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} \quad \text{https://youtu.be/pThJj1qMgSo (3 min)} \quad (5)$$

Die Einheitsvektoren in r - und ϕ -Richtung bilden auch eine Orthonormalbasis,

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}. \quad \text{https://youtu.be/Eccgpe4-KzM (3 min)} \quad (6)$$

Definition: (Kurve, Geschwindigkeit)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung

$$\vec{x}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{heißt Kurve in } \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

<https://youtu.be/Ko0kewZpNDo> (2 min)

Die (Momentan-)Geschwindigkeit (entlang der Kurve) ist die (komponentenweise) Ableitung nach t ,

$$\dot{\vec{x}}(t) = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}. \quad \text{https://youtu.be/YZjcQoh9iJc (3 min)} \quad (8)$$

Beispiele: (immer $t \in \mathbb{R}$)

$$\blacktriangleright \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \quad (9)$$

$$\blacktriangleright \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 \quad (10)$$

$$\blacktriangleright \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 \quad (11)$$

Überlegen Sie: Was sind das für Kurven?

HINWEIS: Vielleicht sind Geraden oder Parabeln dabei.

Bestimmen Sie auch jeweils die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}$.

Nun kombinieren wir Kurven und Polarkoordinaten. Wir geben an, wie sich r und ϕ mit t ändern, und erhalten die Kurve

$$\vec{x}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \\ \sin(\phi(t)) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Beispiele:

$$\blacktriangleright \phi(t) = t, \quad r(t) = 2, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (13)$$

$$\blacktriangleright \phi(t) = t, \quad r(t) = 1 + \frac{t}{2\pi}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (14)$$

Überlegen Sie: Was sind das für Kurven?

HINWEIS: Vielleicht sind Kreise o.Ä. dabei.

$$\text{Und was ist das hier?} \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (15)$$

Die Geschwindigkeit einer in Polarkoordinaten gegebenen Kurve können wir auch allgemein berechnen:

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi \quad \text{https://youtu.be/0yx1FhySe08 (3 min)} \quad (16)$$