Mitschrieb Algebraische Topologie 3

Frank Loose

Wintersemester 2024/2025

LaTeX: Paco Schatz

1 Homologie von Produkten

(1.1) Erinnerung: Seien C, C' zwei Kettenkomplexe. Dann wird $C \otimes C' = (C \otimes C')_{k \in \mathbb{Z}}$,

$$\begin{aligned}
&(C \otimes C')_k = \bigoplus_{p+q=k} C_p \otimes C'_q \\
&\partial_k : (C \otimes C')_k \to (C \otimes C')_{k-1} \\
&\partial_k(c \otimes c') = \partial_p c \otimes c' + (-1)^p c \otimes \partial'_q c', \qquad c \in C_p, c' \in C'_q, p+q=k
\end{aligned}$$

Dann gibt es natürliche Transformationen

$$\begin{aligned}
\lambda = \big(\lambda_k : \big(H(C) \otimes H(C')\big)_k &\to H_k(C \otimes C')\big)_{k \in \mathbb{Z}} \\
[z] \otimes [z'] &\mapsto [z \otimes z']
\end{aligned}$$

und

$$\mu = \Big(\mu_k : H_k(C \otimes C') \to \operatorname{Tor}\big(H(C), H(C')\big)\Big)_{k-1}$$

so dass die folgende Sequenz graduierter abelscher Gruppen exakt ist und spaltet (Künneth-Formel für Kettenkomplexe):

$$0 \to H(C) \otimes H(C') \xrightarrow{\lambda} H(C \otimes C') \xrightarrow{\mu} \operatorname{Tor}^-(H(C), H(C')) \to 0$$

(1.2) Anwendung: Seien A und B abelsche Gruppen. Dann gilt:

$$\operatorname{Tor}(A, B) \simeq \operatorname{Tor}(B, A)$$

Beweis. (a) Seien C und D Kettenkomplexe. Definiere dann:

$$\tau_{pq} : C_p \otimes D_q \to D_q \otimes C_p, \tau_{qp}(c \otimes d) = (-1)^{pq} d \otimes c$$

sowie

$$\tau_k := \bigoplus_{p+q=k} \tau_{pq} : (C \otimes D)_k \to (D \otimes C)_k$$

Dann wird $\tau = (\tau_k) : C \otimes D \to D \otimes C$ eine Kettenabbildung, denn für $c \in C_p, d \in D_q$ gilt:

$$\begin{aligned}
\partial_k \circ \tau_k(c \otimes d) &= \partial_k \left((-1)^{pq} d \otimes c\right) \\
&= (-1)^{pq} \left(\partial_q d \otimes c + (-1)^q d \otimes \partial c\right) \\
&= (-1)^{pq} \partial_q d \otimes c + (-1)^{pq+q} d \otimes \partial_p c
\end{aligned}$$

während

$$\begin{aligned}\tau_{k-1} \circ \partial_k(c \otimes d) &= \tau_{k-1}(\partial_p c \otimes d + (-1)^p c \otimes \partial d) \\ &= (-1)^{(p-1)q} d \otimes \partial_p c + (-1)^{p+p(q-1)} \partial_q d \otimes c \\ &= (-1)^{pq-q} d \otimes \partial_p c + (-1)^{pq} \partial_q d \otimes c \\ &= \partial_k \circ \tau_k(c \otimes d)\end{aligned}$$

Da τ_k Isomorphismus ist ,$\forall k \in \mathbb{Z}$, ist auch

$$\tau_* : H(C \otimes D) \to H(D \otimes C)$$

ein Isomorphismus.

(b) Seien nun

$$\begin{aligned} S_A: &\quad 0 \to R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \to 0 \\ S_B: &\quad 0 \to R' \xrightarrow{\alpha'} F' \xrightarrow{\beta'} B \to 0 \end{aligned}$$

freie Auflösungen von A bzw. B. Man setze dann

$$\begin{aligned} C_A: &\quad \ldots \to 0 \to C_1 \xrightarrow{\alpha} C_0 \to 0 \to \ldots \\ C_B: &\quad \ldots \to 0 \to C_1' \xrightarrow{\alpha'} C_0' \to 0 \to \ldots \end{aligned}$$

mit $C_1 = R, C_0 = F, C_1' = R', C_0' = F'$. Dann sind C_A und C_B Kettenkomplexe und es gilt

$$H_0(C_A) \cong A \text{ und } H_k(C_A) = 0 \text{ für } k \neq 0$$

und ebenso für C_B. Nach der Künneth-Formel ist nun

$$\begin{aligned} H_1(C_A \otimes C_B) &\cong \big(H(C_A) \otimes H(C_B)\big)_1 \oplus \big(\mathrm{Tor}(H(C_A), H(C_B))\big)_0 \\ &\cong \mathrm{Tor}\big(H_0(C_A), H_0(C_B)\big) \\ &\cong \mathrm{Tor}(A, B) \end{aligned}$$

Wegen Teil (a) folgt daher:

$$\mathrm{Tor}(B, A) \cong H_1(C_B \otimes C_1) \cong H_1(C_A \otimes C_B) \cong \mathrm{Tor}(A, B)$$

□

(1.3) Variante: (a) Sei G ein Körper. Ein *G-Kettenkomplex* C ist ein Familie $(C_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ von G-Vektorräumen zusammen mir eine Familie $(\partial_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ von linearen Abbildungen

$$\partial_k : C_k \to C_{k-1}$$

mit $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$, für alle $k \in \mathbb{Z}$.
Man bildet dann in ähnlicher Weise wir bei abelschen Gruppen die *Zykelräume* $Z_k \subseteq C_k$ und *Ränderräume* $B_k \subseteq Z_k \subseteq G_k$. Sie sind ebenso, wie deren Homologie $H_k = Z_k/B_k$, G-Vektorräume.

(b) Seien nun V, W G-Vektorräume. Aus dem (freien) G-Vektorraum $\mathbb{F}(V \times W)$ über der Menge $V \times W$ teilt man dann den Unterraum $U \subseteq F$ heraus, der durch die Relationen

$$\begin{array}{l} (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) \\ (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \end{array} \qquad (\forall v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W)$$

und

$$\begin{array}{l} (\lambda v, w) = \lambda(v, w) \\ (v, \lambda w) = \lambda(v, w) \end{array} \qquad (\forall v \in V, w \in W, \lambda \in G)$$

erzeugt wird.

Der Quotient

$$V \otimes_G W := \mathbb{F}_G(V \times W)/U$$

heißt dann das *G-Tensorprodukt von V und W*. Ist $i : V \times W \to \mathbb{F}_G(V \times W)$ die natürliche Inklusion und $\pi : \mathbb{F}_G(V \times W) \to V \otimes_G W$ die natürlich Projektion, so ist

$$\otimes_G := \pi \circ i : V \times W \to V \otimes_G W$$

eine universelle bilineare Abbildung , d.h. für jedes bilineaere $s : V \times W \to U$ für eine weiteren G-Vektorraum U, gibt es genau eine G-lineare Abbildung $\Phi : V \otimes_G W \to U$ mit $\Phi \circ \otimes = s$,

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\otimes_G"'] & U \\ V \otimes_G W \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

(c) Betrachtet man V und W als abelsche Gruppen (und vergisst die skalare Multiplikation mit G), so beachte man, dass die abelsche Gruppe $V \otimes_{\mathbb{Z}} W$ im Allgemeinen etwas anderes ist als die unterliegende abelsche Gruppe von $V \otimes_G W$. Letzten entsteht aus ersterer, wenn man aus ihr die Untergruppe herausteilt, die von allen Elementen der Form

$$(\lambda v) \otimes w - v \otimes (\lambda w)$$

(mit $\lambda \in G, v \in V, w \in W$) erzeugt wird.

(d) Deshalb ist nun auch für zwei G-Kettenkomplexe $C = (C_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ und $C = (C'_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ das G-Tensorprodukt $C \otimes_G C' = \big((C \otimes C')_k\big)_{k \in \mathbb{Z}}$ etwas anderes als $C \otimes C'$. Hierbei ist wie unter (1.1)

$$\overline{C}_k := (C \otimes_G C')_k = \bigoplus_{p+q=k} C_p \otimes_G C'_q$$
$$\overline{\partial}_k : \overline{C}_k \to \overline{C}_{k-1}$$

gegeben durch

$$\overline{\partial}_k(c \otimes_G c') = \partial_p c \otimes c' + (-1)^p c \otimes \partial'_q c'$$

für $c \in C_p, c' \in C'_q$ und $p + q = k$. $C \otimes_G C'$ ist dann wieder ein G-Kettenkomplex und wie in (1.1) hat man eine natürliche Transformation

$$\lambda = \lambda_{C,C'} : H(C) \otimes_G H(C') \to H(C \otimes_G C')$$

gegeben durch

$$\lambda([z] \otimes [z']) = [z \otimes z']$$

(1.4) Satz: *(Künneth-Formel für G-Kettenkomplexe)* Seien C und C' beliebige G-Kettenkomplexe. Dann ist die natürliche Transformation λ eine *natürliche Äquivalenz* zwischen den Funktoren

$$F_1, F_2 : \underline{\mathbf{KK}} \times \underline{\mathbf{KK}} \to \underline{\mathbf{gAb}}$$

gegeben (auf den Objekten) durch

$$F_1(C, C') = H(C) \otimes_G H(C')$$
$$F_2(C, C') = H(C \otimes_G C')$$

d.h. $\lambda = \lambda_{C,C'}$ ist ein Isomorphismus für alle C und C'.

(1.5) Vorbereitung: (a) Der wesentliche Unterschied im Vektorraumfall der zu dieser Vereinfachung führt, ist folgender:
Ist $f : V \to W$ ein injektive, lineare Abbildung, so besitzt f ein Linksinverses $h : W \to V$, d.h. h ist linear und $h \circ f = \mathrm{id}_V$. Nach dem Basisergänzungssatz kann man nämlich eine Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathrm{Bild}(f) \subseteq W$ zu eine Basis B von W ergänzen. Und dann setzt man etwa für $\mathfrak{B} = (v_i)_{i \in I}$ von $\mathrm{im}(f)$ und $B = (v_i, w_j)_{i \in I, j \in J}$

$$h(v_i) := f^{-1}(v_i), h(w_j) = 0$$

(Wo $f : \mathrm{im}(f) \to V$ hier das Inverse des Isomorphismus $f : V \to \mathrm{im}(f)$ bezeichnet). (Der injektive Homomorphismus $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(n) = 2n$ hat kein Linksinverses). Sind daher $f_1 : V_1 \to W_1$ und $f_2 : V_2 \to W_2$ injektiv, so ist auch $f_1 \otimes f_2 : V_1 \otimes V_2 \to W_1 \otimes W_2$ injektiv, denn sind $h_1 : W_1 \to V_1$ und $h_2 : W_2 \to V_2$ Linksinverse vor f_1 und f_2, so ist $h_1 \otimes h_2 : W_1 \otimes W_2 \to V_1 \otimes VS_2$ linksinvers zu $f_1 \otimes f_2$

$$(h_1 \otimes h_2) \circ (f_1 \otimes f_2) = (h_1 \circ f_1) \otimes (h_2 \circ f_2) = \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} = \mathrm{id}$$

Damit ist auch $h_1 \otimes h_2$ injektiv. (Den Index G am Tensorprodukt haben wir hier unterdrückt.)

Das bedeutet, dass das Tensorieren mit einem festen G-Vektorraum ein *exakter* Funktor von $\underline{\mathbf{Vec}_G}$ nach $\underline{\mathbf{Vec}_G}$ ist, denn mit einem injektiven $\alpha : W_1 \to W_2$ ist ja dann auch $\alpha \otimes \mathrm{id} : W_1 \otimes V \to W_2 \otimes V$ injektiv. Es gibt also in dieser Kategorie kein Torsionsprodukt, d.h.

$$\mathrm{Tor}_G(V, W) = 0$$

für alle G-Vektorräume V, W.

(b) Insbesondere liefert dann der gleich Beweis wie im Falle abelscher Gruppen das *universelle Koeffiziententheorem* für G Kettenkomplexe:

Ist C ein G Kettenkomplex und V ein G-Vektorraum, so ist die natürliche Transformation $\lambda = (\lambda_C)$ mit

$$\lambda_C : H(C) \otimes_G V \to H(C \otimes_G V), [z] \otimes v \mapsto [z \otimes v]$$

eine natürliche Äquivalenz.

Beweis von (1.4) Nun kopiert man den Beweis der Künneth-Formel für Kettenkomplexe (1.1). Zunächst gilt auch das Lemma in der G-Version:

Ist C ein G Kettenkomplex , bei dem alle Randoperatoren trivial sind, so ist für jeden G-Kettenkomplex C'

$$\lambda_{C,C'} : H(C) \otimes H(C') \to H(C \otimes C')$$

ein Isomorphismus, da der Beweis des Lemmas im Wesentlichen das universelle Koeffiziententheorem benutzt.

Aber dann kann man den Beweis von (1.1) übernehmen, der einfacher wird , weil

$$\mathrm{Tor}_G\big(H(C), H(C')\big) = (0)$$

ist. □

(1.12) Kommentar: Diese G Variante der Künneth-Formel ist häufig nützlich, z.B. wenn man sich nur für die Betti-Zahlen oder die Euler-Charakteristik eines Produktraumes interessiert (siehe z.B. 1.35).

(1.13) Motivation: (a) Eigentlich sind wir darauf aus, aus den Homologien $H(X)$ und $H(Y)$ zweier topologischer Räume X und Y auf die Homologie $H(X \times Y)$ des Produktraumes $X \times Y$ zu schließen.
Seien dazu $p, q \in \mathbb{N}_0$ und $\sigma : \Delta^p \to X$ sowie $\tau : \Delta^q \to Y$ ein singuläres p-Simplex in X sowie ein singuläres q-Simplex in Y. Aus

$$\sigma \times \tau : \Delta^p \times \Delta^q \to X \times Y$$

möchte man gerne ein singuläres k-Simplex in $X \times Y$ machen, wo $k = p + q$ ist, oder zumindest eine singuläre k-Kette in $X \times Y$.
Dazu könnte man einen Homöomorphismus

$$f : \big((\Delta^p \times \Delta^q), (\Delta^p \times \Delta^q)^\circ\big) \to (\Delta^k, (\Delta^k)^\circ)$$

(mit $(\Delta^p \times \Delta^q)^\circ := \partial(\Delta^p \times \Delta^q) \subseteq \mathbb{R}^{k+2}$) davor schalten, denn beide Raumpaare sind homöomorph zu $(\mathbb{B}^k, \mathbb{S}^{k-1})$. Es wird sich aber herausstellen, dass man von f lediglich braucht, dass

$$f_* : H_k\big((\Delta^p \times \Delta^q), (\Delta^p \times \Delta^q)^\circ\big) \to H_k\big(\Delta^k, (\Delta^k)^\circ\big)$$

ein Isomorphismus ist. Es reicht deshalb eine feste *Modellkette*

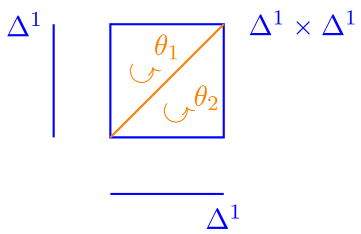
$$m_{pq} \in Z_k\big((\Delta^p \times \Delta^q), (\Delta^p \times \Delta^q)^\circ\big)$$

festzulegen, deren Homologieklasse $[m_{pq}]$ die Homologiegruppe $H_k\big((\Delta^p \times \Delta^q), (\Delta^p \times \Delta^q)^\circ\big)$ erzeugt.

$$m_{pq} := Sf(id_k)$$

wäre eine solche.

Eine solche Modelkette wäre z.B. in Fall $p = q = 1$ durch die Summe der folgenden beiden singulären 1-Simplexe in $\Delta^1 \times \Delta^1$ gegeben.



$$m_n = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

Abbildung 1: Modelkette für den Fall $p = q = 1$

Für $p = q = 0$ bietet sich natürlich die Modellkette

$$m_{00} = (e_0, e_0)$$

an, wenn $\Delta^0 = \{e_0\}$ ist

(b) Wenn das gemacht ist, so könnte man $\sigma \in \sum_p(X)$ und $\tau \in \sum_q(Y)$ die k-Kette

$$S(\sigma \times \tau)(m_{pq}) \in S_k(X \times Y)$$

zuordnen, die dann späte selbst wieder mit $\sigma \times \tau$ bezeichnet wird. Bilinear fortgesetzt erhält man dann ein bilineares

$$\times : S_p(X) \times S_q(Y) \to S_k(X \times Y)$$

dessen Bild gerade aus allen Produktketten besteht (nach Definition).

(c) Bei nichtige Wahl der Modellketten $m_{pq} \in S_k\big((\Delta^p \times \Delta^q), (\Delta^p \times \Delta^q)^\circ\big)$ stellt sich dann die Randformel

$$\partial(\sigma \times \tau) = \partial\sigma \times \tau + (-1)^p \sigma \times \partial\tau$$

als richtig heraus, weshalb dann $\times$ eine Kettenabbildung

$$P = P_{XY} : S(X) \otimes S(Y) \to S(X \times Y)$$

mit

$$\sigma \otimes \tau \to \sigma \times \tau$$

induziert. (vergleiche die Definition des Randoperator auf $S(X) \otimes S(Y)$) und dazu ein Homomorphismus

$$P_* : H\big(S(X) \otimes S(Y)\big) \to H(X \times Y)$$

Während die von $\times$ induzierte Kettenabbildung P_{XY} i.A. keineswegs ein Isomorphismus sein wird (nicht jede k-Kette in $X \times Y$ ist Produktkette !), kann man von dem induzierten P_* erhoffen, dass es ein Isomorphismus ist.

(d) Im Folgenden wird nun erstaunlich Abstrakt vorgegangen, weil die Modellketten gar nicht explizit gebraucht werden. Das liegt daran, dass man von den Kettenabbildungen

$$P_{XY} : S(X) \otimes S(Y) \to S(X \times Y)$$

nur die Eigenschaft braucht, dass sie natürlich sind, d.h. $P = (P_{XY})$ ist eine natürlich Transformation zwischen den Faktoren $F_1, F_2 : \underline{\textbf{Top}} \times \underline{\textbf{Top}} \to \underline{\textbf{KK}}$ die auf der Objekte durch

$$F_1(X,Y) = S(X) \otimes S(Y), \quad F_2(X,Y) = S(X \times Y)$$

gegeben sind, und das sie *normiert* sind (siehe (1.16)). Die zugehörigen Modellketten wären dann

$$m_{pq} := P_{\Delta^p\Delta^q}(\mathrm{id}_p \otimes \mathrm{id}_q) \in S_{p+q}(\Delta^p \times \Delta^q)$$

und wegen der Natürlichkeit von P ist dann tatsächlich für beliebiges X und Y sowie $\sigma \in \Sigma_p(X), \tau \in \Sigma_q(Y)$

$$\begin{aligned} P_{XY}(\sigma \otimes \tau) &= P_{XY}(S\sigma(\mathrm{id}) \otimes S\tau(\mathrm{id})) \\ &= P_{XY}(S\sigma \otimes S\tau)(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\ &\overset{\text{nat. Trafo.}}{=} S(\sigma \otimes \tau) P_{\Delta^p\Delta^q}(\mathrm{id}_P \otimes \mathrm{id}_q) \\ &= S(\sigma \otimes \tau)(m_{pq}) && \text{vgl. (b)} \end{aligned}$$

(Und es wird klar werden, dass $[m_{pq}]$ Erzeuger von $H_k\big((\Delta^p \times \Delta^q), (\Delta^p \times \Delta^q)^\circ\big) \cong \mathbb{Z}$ ist, wenn $m_{00} = (e_0, e_0)$ ist.)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_p \otimes \mathrm{id}_q \arrow[r, mapsto] & m_{pq} \\[-2em]
S(\Delta^p) \otimes S(\Delta^q) \arrow[r, "P_{\Delta^p \Delta^q}"] \arrow[d, "S\sigma \times S\tau"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & S(\Delta^p \times \Delta^q) \arrow[d, "S(\sigma \times \tau)"] \\
S(X) \otimes S(Y) \arrow[r, "P_{X,Y}"'] & S(X \times Y)
\end{tikzcd}$$

(1.14) Erinnerung: Für zwei Kettenkomplexe C und C' heißen zwei Kettenabbildungen $f, g : C \to C'$ kettenhomotop (kurz: homop), wenn es eine Kettenhomotopie $D = (D_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ zwischen ihren gibt, d.h $D_k : C_k \to C'_k$ mit

$$\partial'_{k+1} \circ D_k + D_{k-1} \circ \partial_k = g_k - f_k$$

kurz :

$$\partial' \circ D + D \circ \partial = g - f$$

Es induzieren dann g und f die gleichen Abbildungen in der Homologie, denn

$$g_*([z]) - f_*([z]) = [(g_k - f_k)(z)] = [\partial D(z) + D \underbrace{\partial z}_{=0}] = 0$$

(1.15) Lemma: Seien C und C' nicht-negative Kettenkomplexe und für $k > 0$ sei C_k frei und $H_k(C') = (0)$. Dann gilt:

(a) Sind $f, g : C \to C'$ Kettenabbildungen mit $f_0 = g_0$, so sind f und g bereits homotop.

(b) Sein $B_0 \subseteq C_0$ und $B'_0 \subseteq C'_0$ die entsprechenden Randgruppen und $\varphi : C_0 \to C'_0$ ein beliebiger Homomorphismus, mit $\varphi(B_0) \subseteq B'_0$. Dann gibt es eine Kettenabbildung $f : C \to C'$ mit $f_0 = \varphi$.

Beweis. (a) Induktion über k.
$k = 0$: Wir definieren $D_0 = 0$, dann gilt

$$\partial'_1 \circ D_0 + D_1 \circ \partial_0 = 0 = g_0 - f_0$$

Sei nun $D_j : C_j \to C'_{j+1}$ für $0 \leqslant j \leqslant k$ gewählt, mit

$$\partial'_{j+1} \circ D_j + D_{j-1} \circ \partial_j = g_j - f_j \tag{*}$$

Und sei $(x_j)_{j\in I}$ eine Basis von C_{k+1}. Dann ist $z'_i := (g_{k+1} - f_{k+1} - D_k \circ \partial_{k+1})(x_i) \in C'_{k+1}$ ein Zyklus

$$\begin{tikzcd}
C_{k+1} \arrow[r, "f_{k+1}", "g_{k+1}"'] \arrow[d, "\partial_{k+1}"'] & C'_{k+1} \\
C_k \arrow[ur, "D_k"'] &
\end{tikzcd}$$

Sei $j = k$: Dann ist

$$\begin{aligned}
\partial' z_i' &= (\partial' g_{k+1} - \partial' f_{k+1} - \partial' D_k \circ \partial_{k+1})(x_i) \\
&\overset{(*)}{=} (\partial' g_{k+1} - \partial' f_{k+1} - g_k \circ \partial_{k+1} + f_k \circ \partial_{k+1} + D_{k-1} \underbrace{\partial_k \partial_{k+1}}_{=0})(x_i) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Also ist z_i' ein Zykel und damit auch ein Rand, da $H_*(C') = 0$.
Setze $D_{k+1} x_i = x_i' \in C_{k+2}'$ mit $\partial x_i' = z_i'$. Da C frei ist, lässt sich

$$D_{k+1} : C_{k+1} \to C_{k+2}'$$

eindeutig fortsetzen.
$\forall i \in I$:

$$\partial_{k+1}' \underbrace{D_{k+1}(x_i)}_{=x_i'} = z_i'$$

$$\Rightarrow \partial_{k+1}' D_{k+1}(x_i) + D_k \circ \partial_{k+1}(x_i) = (g_{k+1} - f_{k+1})(x_i)$$

(b) Induktion über k.
$k = 0$: Sei (x_i) Basis von C_1 und wir definieren $z_i' := \varphi \circ \partial_1(x_i)$. Da $\varphi(B_0) \subseteq B_0'$ ist , existiert ein $x_i \in C_1'$ mit $\partial'(x_i) = z_i'$. Definiere $f_0 = \varphi$ und $f_1(x_i) = z_i'$. Dann ist

$$\partial_1' \circ f_1(x_i) = \partial_1'(z_i') = f_0 \circ \partial_1(x_i) \quad \forall i$$

Kettenhomomorphimus. Eigenschaft für f_1 & f_0 (Fall f_0 in trivial)

IS: $k \rightsquigarrow k+1$ Sei $f_0, \dots, f_k$ gegeben mit

$$0 \leqslant j \leqslant k \qquad \partial_j' f_j = f_{j-1} \partial_j \tag{*}$$

Sei des weiteren (x_i) Basis von C_{k+1} und $z_i' = f_k \circ \partial_{k+1}(x_i)$. Dann ist z_i' ein Zykel, denn:

$$\partial_k' z_i' = \partial_k'(f_k \circ \partial_{k+1}(x_i)) \overset{(*)}{=} f_{k+1}(\underbrace{\partial^2(x_i)}_{=0}) = 0$$

Also ist z_i' Rand (da $H_k(C') = 0 \quad \forall k \geqslant 1$). Sei $x_i' \in C_{k+1}'$ mit $\partial' x_i = z_i'$. Definieren wir

$$f_{k+1} : C_{k+1} \to C_{k+1}', \quad x_i \mapsto x_i'$$

dann

$$\partial_{k+1}' \underbrace{f_{k+1}(x_i)}_{=x_i'} = z_i' = f_k(\partial_{k+1}(x_i))$$

Also $\partial_{k+1} \circ f_{k+1} = f_k \circ \partial_{k+1}$

□

(1.16) Definition: Seien F_1 und F_2 Funktoren

$$F_1, F_2 : \underline{\mathbf{Top}} \times \underline{\mathbf{Top}} \to \underline{\mathbf{KK}}$$

die auf den Objekten gegeben sind durch

$$\begin{aligned} F_1(X,Y) &= S(X)\otimes S(Y) \\ F_2(X,Y) &= S(X\times Y) \end{aligned}$$

und naheliegend auf den Morphismen. Daun nennen wir eine natürliche Transformation $P = (P_{XY})$ zwischen F_1 und F_2 *Eilenberg-Zilber-Transformation*, wenn sie normiert ist. D.h. für alle topologischen Räume X und Y, sowie $(x,y) \in (X,Y)$ gilt

$$\begin{aligned} &(P_{XY})_0 : S_0(X)\otimes S_0(Y) \to S_0(X\times Y) \\ &(P_{XY})_0(x\otimes y) = (x,y) \end{aligned}$$

wobei wie üblich $\Sigma_0(X)$ mit X identifiziert wird.

(1.17) Proposition: Sind P, P' Eilenberg-Zilber-Transformationen, dann gilt für alle topologischen Räume X, Y: Die Kettenabbildungen P_{XY} und P'_{XY} sind (ketten-)homotopieäquivalent.

Beweis. (a) Seien $p, q \in \mathbb{N}$, $X = \Delta^p$ und $Y = \Delta^q$. Da P und P' normiert sind, gilt $(P_{XY})_0 = (P'_{XY})_0$. Zudem ist $\Delta^p \times \Delta^q \cong \mathbb{B}^{p+q}$, also $H_k(X\times Y) = 0$ für alle $k > 0$.
Nach (1.15) existiert eine Kettenhomotopie

$$D_{p,q} := D_{\Delta^p,\Delta^q} : S(\Delta^p)\otimes S(\Delta^q) \to S(\Delta^p\times\Delta^q)$$

von $P_{p,q} := P_{\Delta^p,\Delta^q}$ und $P'_{p,q} := P'_{\Delta^p,\Delta^q}$. D.h.

$$\partial D_{p,q} + D_{p,q}\partial = P'_{p,q} - P_{p,q}$$

(b) Seien X, Y beliebige topologische Räume, $k \in \mathbb{N}$, $p, q \in \mathbb{N}_0$ mit $p + q = k$. Für $\sigma \in \Sigma_p(X)$ und $\tau \in \Sigma_q(Y)$ setzen wir

$$\begin{aligned} (D_{XY})_k : \big(S(X)\otimes S(Y)\big)_k &\to S_{k+1}(X\times Y); \\ \sigma\otimes\tau &\mapsto S(\sigma\times\tau)\big((D_{pq})_k(\mathrm{id}_p\otimes\mathrm{id}_q)\big) \end{aligned}$$

Dann kommutiert per Konstruktion.

$$\begin{tikzcd} S(\Delta^p)\otimes S(\Delta^q) \arrow[r, "D_{p,q}"] \arrow[d, "S\sigma\otimes S\tau"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & S(\Delta^p\times\Delta^q) \arrow[d, "S(\sigma\times\tau)"] \\ S(X)\otimes S(Y) \arrow[r, "D_{XY}"] & S(X\times Y) \end{tikzcd}$$

denn $\sigma\otimes\tau = (S\sigma\otimes S\tau)(\mathrm{id}_p\otimes\mathrm{id}_q)$.

(c) D_{XY} ist eine Kettenhomotopie zwischen P_{XY} und P'_{XY}, denn für $\sigma \in \Sigma_p(X), \tau \in \Sigma_q(Y)$ gilt

$$\begin{aligned} (\partial D_{XY} + D_{XY}\partial)(\sigma\otimes\tau) &= \partial S(\sigma\times\tau)\circ D_{pq}(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}) + D_{XY}\circ\partial(S\sigma\otimes S\tau)(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}) \\ &= \big[S(\sigma\times\tau)\partial D_{pq} + D_{XY}\circ\partial(S\sigma\otimes S\tau)\big](\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}) \\ &= \big[S(\sigma\times\tau)\circ(P'_{pq} - P_{pq} - D_{pq}\partial) + D_{XY}\circ\partial(S\sigma\otimes S\tau)\big](\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}) \\ &= S(\sigma\times\tau)\circ(P'_{pq} - P_{pq})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}) \\ &= (P'_{pq} - P_{pq})(\sigma\times\tau) \end{aligned}$$

Also $\partial D_{XY} + D_{XY}\partial = P'_{pq} - P_{pq}$

□

(1.18) Kommentar: (a) D_{XY} ist natürlich. Seien $f : X \to X'.g : Y \to Y'$ stetig, $\sigma \in \Sigma_p(X), \tau \in \Sigma_q(Y)$:

$$\begin{aligned} D_{XY}(Sf \otimes Sg)(\sigma \otimes \tau) &= D_{X'Y'}(S(f \circ \sigma) \otimes S(g \circ \tau))(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\ &= (S(f \circ \sigma) \times (g \circ \tau))D_{pq}(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\ &= S(f \times g) \circ S(\sigma \times \tau)D_{pq}(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \\ &= S(f \times g)D_{XY}(\sigma \otimes \tau) \end{aligned}$$

(b) Vgl. Beweis des Homotopitsatzes oder der Baryzentrischen Unterteilung. Man nennt das die Methode der Azyklischen Modelle.

(1.19) Proposition: Es existiert eine EZ-Transformation

$$P = (P_{XY})_{X,Y}$$

Beweis. (a) Seien wieder $p, q \in \mathbb{N}_0, X = \Delta^p, Y = \Delta^q$. Ist zu $z \in \big(S(X) \otimes S(Y)\big)_0$ ein Rand, so ist z eine Linearkombination von Elementen der Form

$$(x_2 - x_1) \otimes y \qquad \text{und} \qquad x \otimes (y_2 - y_1)$$

mit $x, x_1, x_2 \in S(X)$ und $y, y_1, y_2 \in S(Y)$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} &\varphi_0 : S_0(\Delta^p) \otimes S_0(\Delta^q) \to S_0(\Delta^p \times \Delta^q) \\ &\varphi_0(x \otimes y) = (x, y) \end{aligned} \tag{*}$$

bildet Ränder in Ränder ab, denn

$$(x_2, y) - (x_1, y) \qquad \text{bzw.} \qquad (x, y_2) - (x, y_1)$$

sind Ränder in $S_0(\Delta^p \times \Delta^q)$. Nach dem Lemma (1.15) b) gibt es daher eine Kettenabbildung

$$P_{pq} : S(\Delta^p) \otimes S(\Delta^q) \to S(\Delta^p \times \Delta^q)$$

mit $(P_{pq})_0 = \varphi_0$ (denn $S_0(\Delta^p) \otimes S_0(\Delta^q)$ ist frei und $S_0(\Delta^p \times \Delta^q)$ azyklish, da $\Delta^p \times \Delta^q$ zusammenziehbar ist).

(b) Nun setzen wir für beliebigen (X, Y) und $\sigma \in \Sigma_p(X), \tau \in \Sigma_q(Y)$ wieder

$$\begin{aligned} &P_{XY} : S(X) \otimes S(Y) \to S(X \times Y) \\ &P_{XY}(\sigma \otimes \tau) := S(\sigma \times \tau)\big(P_{pq}(\mathrm{id}_p \otimes \mathrm{id}_q)\big) \end{aligned} \tag{**}$$

fest, so dass

$$\begin{array}{ccc} S(\Delta^p) \otimes S(\Delta^q) & \xrightarrow{\quad P_{p,q} \quad} & S(\Delta^p \times \Delta^q) \\ {\scriptstyle S\sigma \otimes S\tau}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle S(\sigma \times \tau)} \\ S(X) \otimes S(Y) & \xrightarrow{\quad P_{XY} \quad} & S(X \times Y) \end{array}$$

(und $P_{pq} = P_{\Delta^p \Delta^q}$ ist). Wie in (1.18) (a) sieht man dann, das $P = (P_{XY})$ tatsächlich natürlich Transformation ist, die wegen (*),(**) und $P_{pq} = \varphi_0$ auch normiert ist.

□

(1.20) Kommentar: (a) Gehen wir von der Kategorie $\underline{\mathbf{KK}}$ zur Homotopiekategorie $\underline{\mathbf{HKK}}$ über, so gibt es nach (1.17) und (1.19) also genau eine natürlich Transformation P von F_1 nach F_2, wobei $F_1, F_2 : \underline{\mathbf{Top}} \times \underline{\mathbf{Top}} \to \underline{\mathbf{HKK}}$, die normiert ist und auf den Objekten durch

$$F_1(X,Y) = S(X) \otimes S(Y), \quad F_2(X,Y) = S(X \times Y)$$

gegeben ist.

(b) Auf die gleich Weise können wir nun auch ein (Homotopie-)Inverses $Q = \big(Q_{XY} : S(X \times Y) \to S(X) \otimes S(Y)\big)_{X,Y}$ konstruieren, d.h. für jeden Paar (X,Y) ist

$$P_{XY} : S(X) \otimes S(Y) \to S(X \times Y)$$

sogar eine Homotopie-Äquivalenz.

(1.21) Proposition: Seien $F_1, F_2 : \underline{\mathbf{Top}} \times \underline{\mathbf{Top}} \to \underline{\mathbf{HKK}}$ wie oben.

(a) Dann gibt es eine natürliche Transformation $Q = (Q_{XY})_{X,Y}$ von F_2 nach F_1, die normiert ist, d.h.

$$(Q_{XY})_0(x,y) = x \otimes y \quad \forall x \in X, y \in Y$$

(b) Sind Q und Q' zwei solcher normierter, natürlicher Transformationen, so gibt es ein natürliche Familie von Kettenhomotopien

$$D = (D_{XY} : Q_{XY} \xrightarrow{\simeq} Q'_{XY})$$

zwischen ihnen.

Beweis. (a) (i) Sei $k \in \mathbb{N}_0$ $X = \Delta^k$ und $Y = \Delta^k$. Es ist $S(\Delta^k \times \Delta^k)$ frei und nach der Künneth-Formel für Kettenkomplexe für $k > 0$

$$\begin{aligned} H_k(S(\Delta^k) \otimes S(\Delta^k)) &= \big[H_0(\Delta^k) \otimes \underbrace{H_k(\Delta^k)}_{=(0)} \oplus H_1(\Delta^k) \otimes H_{k-1}(\Delta^k) \oplus \ldots \oplus \underbrace{H_k(\Delta^k)}_{=(0)} \otimes H_0(\Delta^k)\big] \\ &\quad \oplus \big[\underbrace{\mathrm{Tor}(H_0(\Delta^k) \otimes H_{k-1}(\Delta^k))}_{=(0)} \oplus \ldots \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}(H_{k-1}(\Delta^k) \otimes H_0(\Delta^k))}_{=(0)}\big] \\ &= (0) \end{aligned}$$

Nach (1.15) (b) gibt es deshalb eine Kettenabbildung

$$Q_k : S(\Delta^k \times \Delta^k) \to S(\Delta^k) \otimes S(\Delta^k)$$

mit

$$(Q_k)_0(x,y) = x \otimes y, \qquad \forall x, y \in \Delta^k,$$

denn

$$\begin{aligned} \varphi_0 : S_0(\Delta^k \times \Delta^k) &\to S_0(\Delta^k) \otimes S_0(\Delta^k) \\ (x,y) &\mapsto x \otimes y \end{aligned}$$

bildet Ränder auf Ränder ab, denn ist $\gamma : [0,1] \to \Delta^k \times \Delta^k$ ein Weg von (x_1, y_1) nach (x_2, y_2) so ist $\gamma_1 := \pi_1 \circ \gamma$ Weg von x_1 nach x_2 und $\gamma_2 := \pi_2 \circ \gamma$ Weg von y_1 nach y_2 ($\pi 1, \pi_2 : \Delta^k \times \Delta^k \to \Delta^k$ die Projektionen auf den 1. bzw. 2. Faktor). Wegen

$$\begin{aligned}\varphi_0((x_2, y_2) - (x_1, y_1)) &= x_2 \otimes y_2 - x_1 \otimes y_1\\ &= (x_2 - x_1) \otimes y_2 + x_1 \otimes (y_2 - y_1)\\ &= \partial\gamma_1 \otimes y_2 + x_1 \otimes \partial\gamma_2\\ &= \partial(\gamma_1 \otimes y_2 + x_1 \otimes \gamma_2)\end{aligned}$$

Bildet φ_0 Ränder auf Ränder ab,

(ii) Sei $k \in \mathbb{N}_0$, X, Y topologische Räume, sowie $\sigma \in \Sigma_k(X \times Y)$ beliebig. Sei $d_k \in S_k(\Delta^k \times \Delta^k)$ das *Diagonalsimplex*

$$d_k = (\mathrm{id}_k, \mathrm{id}_k),$$

also

$$d_k(x) = (x, x), \quad \forall x \in \Delta^k$$

Setze dann mit $\sigma_i := \pi_i \circ \sigma \quad (i = 1, 2)$

$$\begin{aligned}Q_{XY} &: S(X \times Y) \to S(X) \otimes S(Y),\\ (Q_{XY})_R(\sigma) &:= (S\sigma_1 \otimes S\sigma_2)(Q_k(d_k))\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) &= (S\sigma_1(\mathrm{id}), S\sigma_2(\mathrm{id}))\\ &= (S\sigma_1, S\sigma_2)(\mathrm{id}, \mathrm{id}) = S(\sigma_1, \sigma_2)(d) = S\sigma(d)\end{aligned}$$

ist dann:

$$Q_{XY} \circ S\sigma = (S\sigma_1 \otimes S\sigma_2) \circ Q_k,$$

also kommutativ:

$$\begin{tikzcd} S_k(\Delta^k) \arrow[r, "Q_k"] \arrow[d, "S_k\sigma"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \big(S(\Delta^k) \otimes S(\Delta^k)\big)_k \arrow[d, "(S\sigma_1 \times S\sigma_2)_k"] \\ S_k(X \times Y) \arrow[r, "Q_{XY}"] & \big(S(X) \otimes S(Y)\big)_k \end{tikzcd}$$

Es ist dann ähnlich zu zeigen wir bei P, Q_{XY} tatsächlich eine Kettenabbildung, normiert und natürlich in X und Y.

(b) Sind Q und Q' gegeben, so zeigt man in (1.17), dass es eine natürliche Homotopie $D : Q \cong Q'$ gibt (zunächst auf $X = Y = \Delta^k, k \in \mathbb{N}_0$, dann allgemein).

□

(1.22) Satz: (von Eilenberg-Zilber) Seien $P : F_1 \to F_2$ und $Q : F_1 \to F_2$ die eindeutig bestimmten, normierten natürlichen Transformationen zwischen den Funktoren mit

$$F_1(X, Y) = S(X) \otimes S(Y), F_2(X, Y) = S(X \times Y)$$

Dann sind P und Q invers zueinander, d.h.

$$P \circ Q = \mathrm{id}, Q \circ P = \mathrm{id}$$

Das bedeutet P und Q sind natürliche Äquivalenzen zwischen $\tilde{F_1}$ und $\tilde{F_2}$, wenn $\tilde{F_1}, \tilde{F_1} : \underline{\textbf{Top}} \times \underline{\textbf{Top}} \to \underline{\textbf{HKK}}$ mit $\tilde{F_1} = \pi_1 \circ F_1, \tilde{F_2} = \pi_2 \circ F_2$ und die nat. $\pi : \underline{\textbf{KK}} \to \underline{\textbf{HKK}}$ ist.

(1.23) Kommentar: (a) Ist P eine EZ-Trafo, so ist also

$$P_{XY} : S(X) \otimes S(Y) \to S(X \times Y)$$

für alle X, Y eine Homotopieäquivalenz. Insbesondere induziert P für alle X, Y und $k \in \mathbb{N}_0$ einen Isomorphismus

$$(P_{XY})_{*k} : H_k(S(X) \otimes S(Y)) \to H_k(X \times Y)$$

(b) Man nennt (jeder Wahl von) $Q = (Q_{XY} : S(X \times Y) \to S(X) \otimes S(Y))_{X,Y}$ eine EZ-Äquivalenz. Während wir P nicht explizit angegeben haben, kann man die für Q wie folgt tun:

(1.24) Definition: (a) Seien $p, q, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leqslant p, q \leqslant k$. Wir bezeichnen dann mit

$$(\delta')^k_p : \Delta^p \to \Delta_k$$

und

$$(\delta'')^k_p : \Delta^q \to \Delta_k$$

die Einschränkungen der linearen Abbildungen, die durch

$$(\delta')^k_p(e_i) = e_i \quad \text{für } i = 0, \dots, p$$

und

$$(\delta'')^k_p(e_j) = e_{k-q+j} \quad \text{für } j = 0, \dots, q$$

gegeben sind.

(b) Sei nun $k = p + q$ und $\sigma : \Delta^k \to X$ ein singuläres k-Simplex in X. Dann heißt $\sigma' \in \Sigma_p(X)$ mit

$$\sigma' = \sigma \circ (\delta')^k_p$$

die *p-te Vorderseite von σ* und $\sigma'' \in \Sigma_q(X)$ mit

$$\sigma'' = \sigma \circ (\delta'')^k_q$$

die *q-te Hinterseite von σ*.

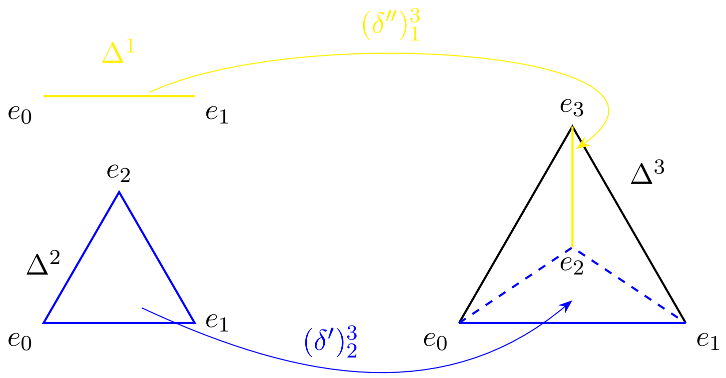


Abbildung 2: Beispiel für den Fall $k = 3, p = 2, q = 1$.

(1.25) Kommentar: Setzt man nun für topologische Räume X und Y, $k \in \mathbb{N}$ sowie $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \Sigma_k(X, Y)$

$$Q_{XY}(\sigma) := \sum_{p=0}^{k} (\sigma_1')_p \otimes (\sigma_2'')_{k-p}$$

So kann man nachrechnen, dass $Q_{XY} : S(X \times Y) \to S(X) \otimes S(Y)$ eine Kettenabbildung ist, die normiert ist und $(Q_{XY})_{X,Y}$ eine natürliche Transformation von F_1 nach F_2. Q ist also eine EZ-Äquivalenz.

Beweis von 1.22:

(i) Wir konstruieren eine (natürliche und normierte) Kettenhomotopie von $Q_{XY} \circ P_{XY}$ nach $\mathrm{id}_{S(X) \otimes S(Y)}$ zunächst für $X = \Delta^p$ und $Y = \Delta^q$. Das geht nach (1.15) (a), weil $S(\Delta^p) \otimes S(\Delta^q)$ frei ist und $S(\Delta^p \times \Delta^q)$ azyklisch. Diese Homotopie $D_{pq} : (Q \circ P)_{X,Y} \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}$ setzt man dann wie gehabt zu eine natürlichen Transformation $D = (D_{XY})_{X,Y}$ fort, die eine Homotopie zwischen $Q \circ P$ und id liefert.

(ii) Genauso bei $P \circ Q$ (zunächst auf $X = Y = \Delta^k (k \in \mathbb{N}_0)$, dann allgemein)

□

(1.26) Definition: Seien X und Y topologische Räume und $P = \big(P_{XY} : S(X) \otimes S(Y)) \to S(X \times Y)\big)_{X,Y}$ eine EZ-Transformation. Wir definieren das *Homologie-Kreuzprodukt*

$$H(X) \times H(X') \to H(X \times X')$$

durch

$$([z], [z']) \mapsto [P(z \otimes z')]$$

(1.27) Kommentar: (a) Für zwei graduierte abelsche Gruppen $G = (G_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ und $G' = (G'_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ setzt man $G \times G' = \big((G \times G')_k\big)_{k \in \mathbb{Z}}$ durch

$$(G \times G')_k = \oplus_{p+q=k} G_p \times G'_q$$

Es ist dann $G \times G'$ eine graduierte abelsche Gruppe (die Summe (Koprodukt) von G und G' in $\underline{\mathbf{gAb}}$).

(b) Das Homologie-Kreuzprodukt ist wohldefiniert und hängt nicht von der Wahl der EZ-Traf ab. Ist nämlich

$$\lambda = \big(\lambda_{XY} : H(X) \otimes H(Y) \to H(S(X) \otimes S(Y))\big)$$

die natürliche Transformation mit

$$\lambda_{XY}([z] \otimes [z']) = [z \otimes z']$$

aus (1.4) (c), so geht für $\alpha = [z] \in H_p(X)$ und $\beta = [z'] \in H_q(Y) (p, q \in \mathbb{N}_0)$

$$\alpha \times \beta = [P(z \otimes z')] = P_*([z \otimes z']) = P_* \circ \lambda(\alpha \otimes \beta)$$

und $P_* = P'_*$ für je zwei EZ-Trafos P und P' da diese homotop sind (1.17).

(c) Man kann sich $\alpha \times \beta \in H_{p+q}(X \times Y)$ für $\alpha \in H_p(X)$ und $\beta \in H_q(Y)$ konkret so vorstellen, dass man (via P) eine Modellkette $m_{pq} \in H_{p+q}\big(\Delta^p \times \Delta^q, (\Delta^p \times \Delta^q)^\circ\big)$ gewählt hat und zwei Repräsentanten $z \in S_p(X), z' \in S_q(Y)$ die Produktketten $z \times z' = P(z \otimes z')$ wie in (1.13) bildet und davon die Honologieklasse.

(1.28) Satz: Für je zwei topologische Räume X und Y sei $\times_{X,Y}$ das Homologie-Kreuzprodukt auf $H(X) \times H(Y)$. Dann gilt:

(a) $\times = (\times_{X,Y})_{X,Y}$ ist eine *natürliche Transformation* zwischen den Funktoren $F_1, F_2 : \underline{\mathbf{Top}}^2 \to \underline{\mathbf{gAb}}$ mit

$$F_1(X,Y) = H(X) \times H(Y), \quad F_2(X,Y) = H(X \times Y)$$

(b) Das Kreuzprodukt ist *bilinear.*

(c) Das Kreuzprodukt ist in folgendem Sinn *graduiert kommutativ.* Ist

$$t_{XY} : X \times Y \to Y \times X$$

die Komponentenvertauschung $(x,y) \mapsto (y,x)$, so gilt für alle $\alpha \in H_p(X)$ und $\beta \in H_q(Y)$ $(p,q \in \mathbb{N}_0)$:

$$\alpha \times \beta = (-1)^{pq} t_*(\alpha \times \beta)$$

(d) Das Homologie-Kreuzprodukt ist im folgenden Sinne *assoziativ*:
Für topologische Räume X, Y und Z sowie Homologieklassen $\alpha \in H_p(X), \beta \in H_q(Y), \gamma \in H_r(Z)$ gilt in $H_{p+q+r}(X \times Y \times Z)$:

$$(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma).$$

(e) *Neutrales Element:* Sei $x_0 \in X$ und $j = j_{x_0} : Y \to X \times Y : y \mapsto (x_0, y)$. Dann gilt für alle $\beta \in H_q(Y)$:

$$[x_0] \times \beta = j_*([\beta])$$

(und ähnlich bei $y_0 \in Y$ und $j' : X \times \{y_0\} \to X \times Y$).

Beweis. (a) Die Darstellung

$$\alpha \times \beta = P_* \circ \lambda(\alpha \times \beta)$$

zeigt, dass das Kreuzprodukt natürlich ist, d.h. sind $f : X \to X'$ und $g : Y \to Y'$ stetig , so ist

$$(f \times g)_*(\alpha \times \beta) = f_*\alpha \times g_*\beta$$

$$\begin{tikzcd}
H(X) \times H(Y) \arrow[r, "\times_{X,Y}"] \arrow[d, "f_* \times g_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H(X \times Y) \arrow[d, "(f \times g)_*"] \\
H(X') \times H(Y') \arrow[r, "\times_{X',Y'}"] & H(X' \times Y')
\end{tikzcd}$$

(b) Die gleich Formel zeigt auch, dass $\times_{X,Y}$ bilinear ist, also

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \times \beta = (\alpha_1 \times \beta) + (\alpha_2 \times \beta) \quad \text{und}$$
$$\alpha \times (\beta_1 + \beta_2) = (\alpha \times \beta_1) + (\alpha \times \beta_2),$$

denn $\otimes$ in bilinear, sowie λ und P_* sind bilinar.

(c) Betrachte die Kettenabbildung

$$\tau_{X,Y} : S(X) \otimes S(Y) \to S(Y) \times S(X)$$
$$\tau(c \otimes d) = (-1)^{pq} d \otimes c$$

für $c \in S_p(X), d \in S_q(Y), (p, q \in \mathbb{N}_0$, vlg. (1.2) (a)). Wir behaupten, dass das folgende Diagramm bis auf Homotopie kommentiert:

$$\begin{tikzcd} S(X) \otimes S(Y) \arrow[r, "\tau_{XY}"] \arrow[d, "P_{XY}"'] & S(Y) \otimes S(X) \arrow[d, "P_{YX}"] \\ S(X \times Y) \arrow[r, "St_{XY}"] & S(Y \times X) \end{tikzcd} \tag{*}$$

Es folgt dann für $\alpha = [z] \in H_p(X), \beta = [z'] \in H_q(Y)$:

$$\begin{aligned} \beta \times \alpha &= [P_{XY}(z' \otimes z)] \\ &= (-1)^{pq}[P_{YX} \circ \tau_{X,Y}(z \otimes z')] \\ &\overset{(*)}{=} (-1)^{pq}[St_{XY} \circ P_{XY}(z \otimes z')] \\ &= (-1)^{pq}(t_{XY})_*([P_{XY}(z \otimes z')]) \\ &= (-1)^{pq}(t_{XY})_*(\alpha \times \beta) \end{aligned}$$

Zur Kommutativität von (*) bis auf Homotopie benutzen wir wieder die Methode der azyklischen Modelle: Für $X = \Delta^p$ und $Y = \Delta^q$ ist $S(X) \otimes S(Y)$ frei und $S(X \times Y)$ azyklisch und außerdem

$$(P_{YX} \circ \tau_{XY})_0(x \otimes y) = (P_{YX})_0(y \otimes x) = (y, x) = (St_{XY})_0(x, y) = (St_{XY} \circ P_{XY})_0(x \otimes y)$$

für alle $x \in X, y \in Y$. Deshalb sind $P_{YX} \circ \tau_{XY}$ und $St_{XY} \circ P_{XY}$ für $X = \Delta^p$ und $Y = \Delta^q$ homotop. Nun ist neben $P = (P_{XY})$ auch $t = (t_{XY})$ natürliche Transformation und deshalb sind $P_{YX} \circ \tau_{XY}$ und $St_{XY} \circ P_{XY}$ für beliebige X und Y homotop ((1.17) Beweis Teil (b)).

(d) Betrachte hier das Diagramm

$$\begin{tikzcd} S(X) \otimes S(Y) \otimes S(Z) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes P_{Y,Z}"] \arrow[d, "P_{XY} \otimes \mathrm{id}"'] & S(X) \otimes S(Y \times Z) \arrow[d, "P_{X,Y \times Z}"] \\ S(X \times Y) \otimes S(Z) \arrow[r, "P_{X \times Y,Z}"] & S(X \times Y \times Z) \end{tikzcd}$$

Das diese Diagramm bis auf Homotopie kommutiert beweist man wie in (c) mit der Methode der azyklische Modelle. Es folgt dann für $\alpha = [z] \in H_p(X), \beta = [z'] \in H_q(Y), \gamma = [z''] \in H_r(Z)$

$$\begin{aligned} (\alpha \times \beta) \times \gamma &= [P_{XY}(z \otimes z')] \times \gamma \\ &= [P_{X \times Y,Z}(P_{X,Y}(z \otimes z') \otimes z'')] \\ &= [P_{X \times Y,Z} \circ (P_{X,Y} \otimes \mathrm{id})(z \otimes z' \otimes z'')] \\ &= [P_{X \times Y,Z} \circ (\mathrm{id} \otimes P_{Y,Z})(z \otimes z' \otimes z'')] \\ &= [P_{X \times Y,Z}(z \otimes P_{Y,Z}(z' \otimes z''))] \\ &= \alpha \times (\beta \times \gamma) \end{aligned}$$

(e) Methode der azyklischen Modelle: Sei zunächst $X = \{x_0\}$ und $\psi : S(Y) \to S(X) \otimes S(Y)$ die Kettenabbildung, mit

$$\psi(d) = x_0 \otimes d$$

Dann kommutiert bis auf Homotopie folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} S(Y) \arrow[rr, "Sj"] \arrow[dr, "\psi"'] & & S(X \times Y) \\ & S(X) \otimes S(Y) \arrow[ur, "P_{XY}"'] & \end{tikzcd} \tag{*}$$

(Beweis Zunächst im Modellfall $Y = \Delta^q (q \in \mathbb{N}_0)$, dann allgemein). Es folgt dann für $\beta = [z'] \in H_q(Y)$:

$$\begin{aligned} [x_0] \times \beta &= [P_{XY}(x_0 \otimes z')] \\ &= [P_{XY} \circ \psi(z')] \\ &= (P_{XY} \circ \psi)_*([z']) \\ &\overset{(*)}{=} j_*\beta \end{aligned}$$

Für den allgemeinen Fall nutzen wir Teil (a) mit den Abbildungen $i : \{x_0\} \hookrightarrow X, j_0 : Y \to \{x_0\} \times Y$ und $j : Y \to X \times Y$ wie oben. Wegen

$$(i \otimes \mathrm{id}) \circ j_0 = j,$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "j_0"] \arrow[dr, "j"'] & & x_0 \times Y \\ & X \times Y \arrow[ur, "i \otimes \mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

ist dann :

$$\begin{aligned} [x_0]_X \times \beta &= i_*([x_0]) \times \beta \\ &= (i_* \otimes \mathrm{id}_*)([x_0] \times \beta) \\ &= (i \otimes \mathrm{id})_*((j_0)_*(\beta)) \\ &= ((i \otimes \mathrm{id}) \circ j_0)_*(\beta) \\ &= j_*(\beta) \end{aligned}$$

□

Da $\times : H(X) \times H(Y) \to H(X \times Y)$ bilinear ist induziert $\times$ ein eindeutig bestimmtes, lineares $H(X) \otimes H(Y) \to H(X \times Y)$ welches wir ebenfalls mit $\times$ bezeichnen

$$\begin{tikzcd} H(X) \times H(Y) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H(X \times Y) \\ H(X) \otimes H(Y) \arrow[ur, "\times"'] & \end{tikzcd}$$

Erinnere: $\big(H(X) \otimes H(Y)\big)_k = \bigoplus_{p+q=k} H_p(X) \otimes H_q(Y)$

(1.29) Satz: (Künneth-Formel für topologische Räume) Seien X und Y topologische Räume und $\times : H(X) \otimes H(Y) \to H(X \times Y)$ ihr Homologie-Kreuzprodukt, $Q : S(X \times Y) \to S(X) \otimes S(Y)$ eine EZ-Äquivalenz und $\mu : S(X) \otimes S(Y) \to \mathrm{Tor}^-(H(X), H(Y))$ die natürliche Abbildung aus (1.16) (d). Dann ist die folgende kurze Sequenz zwischen graduierten abelschen Gruppen exakt, natürlich und sie spaltet:

$$0 \to H(X) \otimes H(Y) \xrightarrow{\times} H(X \times Y) \xrightarrow{\mu \circ Q_*} \mathrm{Tor}^-(H(X), H(Y)) \to 0 \qquad (*)$$

(1.30) Kommentar: Für eine graduierte abelsche Gruppe $(G_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ bezeichnen wir mit $G^- = (G_k^-)_{k \in \mathbb{Z}}$ die in der Graduierung um -1 geshiftete graduierte abelsche Gruppe, $G_k^- = g_{k-1}$ Es ist also

$$\left(\mathrm{Tor}^-(H(X), H(Y))\right)_k = \mathrm{Tor}(H(X), H(Y))_{k-1}$$

Beweis von 1.29: Sei $P = (P_{XY})$ eine EZ-Trafo, $P_{YX} : S(X) \otimes S(Y) \to S(X \times Y)\cdot$ Benutze nun die Künneth-Formel für Kettenkomplexe (1.1): Da die Reihe von

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H(X) \otimes H(X') \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "\times"'] & H(S(X) \otimes S(Y)) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, shift right, "P_*"'] & \mathrm{Tor}^-(H(X), H(Y)) \arrow[r] & 0 \\
& & H(X \times Y) \arrow[u, shift right, "Q_*"'] \arrow[ur, "\mu \circ Q_*"'] & &
\end{tikzcd}$$

exakt und natürlich ist und spaltet, ist die für (*) auch so. $\square$

(1.31) Beispiel: (a) Ist insbesondere $H(X)$ oder $H(Y)$ frei, so liefert das Homologie-Kreuzprodukt einen Isomorphismus.

(i) Z.b. ist dann für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$

$$H_k(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 0, m, n, m+n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und für $m = n$

$$H_k(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 0, 2n \\ \mathbb{Z}^2 & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sind außerdem $[\mathbb{S}^m] \in H_m(\mathbb{S}^m)$ und $[\mathbb{S}^n] \in H_m(\mathbb{S}^n)$ fest gewählte Orientierungen von $\mathbb{S}^m$ bzw $\mathbb{S}^n$. So wird für jedes $x \in \mathbb{S}^m$ und $y \in \mathbb{S}^n$ $H_0(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n)$ von $[(x, y)]$ erzeugt, bei $m \neq n$ dann $H_m(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n)$ von $(j_y)_*([\mathbb{S}^m])$, $H_n(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n)$ von $(j_x)_*([\mathbb{S}^n])$ und $H_{m+n}(\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n)$ von $[\mathbb{S}^m] \times [\mathbb{S}^n]$ erzeugt.
Im Fall $m = n$ wird $H_n(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n)$ von $(j_y)_*([\mathbb{S}^n])$ und $(j_x)_*([\mathbb{S}^n])$ erzeugt.

(ii) Für den n-dimensionalen Torus $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$ ist

$$H_k(\mathbb{T}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{\binom{n}{k}} & \text{für } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist $[\mathbb{S}^1]$ Orientierung auf $\mathbb{S}^1$, $x_i \in \mathbb{S}^n (i = 1, \ldots, n)$ und

$$[\mathbb{S}_i^1] := (j_i)_*([\mathbb{S}^1])$$

mit $j_i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{T}^n$

$$j_i(x) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

$(i = 1, \ldots, n)$, so wird $H_k(\mathbb{T}^n)$ frei von den Homologieklassen

$$[\mathbb{S}^1_{i_1}] \times \ldots \times [\mathbb{S}^1_{i_k}] \in H_k(\mathbb{T}^n) \quad \text{mit} \quad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$$

erzeugt. Induktion über n:

$n = 0$: ✓
$n \rightsquigarrow n+1$:

$$\begin{aligned} H_k(\mathbb{T}^{n+1}) &= H_k(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^n) \\ &\overset{K}{=} \big(H_0(\mathbb{S}^1) \otimes H_k(\mathbb{T}^n)\big) \oplus \big(H_1(\mathbb{S}^1) \otimes H_{k-1}(\mathbb{T}^n)\big) \\ &\overset{IV}{=} \big(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}^{\binom{n}{k}}\big) \oplus \big(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}^{\binom{n}{k-1}}\big) \\ &= \mathbb{Z}^{\binom{n}{k}} \oplus \mathbb{Z}^{\binom{n}{k-1}} \\ &= \mathbb{Z}^{\binom{n+1}{k}} \end{aligned}$$

(b) Für $k = 1$ gilt bei beliebigen topologischen Räumen X und Y.

$$H_1(X \times Y) \cong (H_0(X) \otimes H_1(Y)) \oplus (H_1(X) \otimes H_0(Y)),$$

insbesondere, wenn X und Y wegzusammenhängend sind:

$$H_1(X \times Y) \cong H_1(X) \oplus H_1(Y)$$

In diesem Fall ist nämlich

$$\operatorname{Tor}_0\big(H(X), H(Y)\big) = \big(\operatorname{Tor}(H(X), H(Y))\big)_0 = (0)$$

weil $H_0(X)$ und $H_0(Y)$ frei sind.

(1.32) Definition: Sei G ein Ring (kommutativ mit Eins) , $P = (P_{XY})$ eine EZ-Trafo und X, Y topologische Räume. Für $\alpha = [z] \in H_p(X; G)$ und $\beta = [z'] \in H_q(Y; G)$ $(p, q \in \mathbb{N}_0)$,

$$z = \sum_i g_i c_i, \quad z' = \sum_j g'_j c'_j$$

Setzen wir :

$$\alpha \times_G \beta = \left[\sum_{i,j} (g_i g'_j) P_{XY}(c_i \otimes c'_j)\right] \in H_{p+q}(X \times Y; G)$$

und nennen dies das *G-Homologie-Kreuzprodukt von α und β.*

(1.33) Kommentar: (a) Wir notieren (wie füher) ein Element $c \otimes g \in S(X) \otimes G$ wie üblich mit gc.

(b) Betrachte für einen Ring G die Kettenabbildung

$$\begin{aligned} &f : \big(S(X) \otimes G\big) \otimes_G \big(S(Y) \otimes G\big) \to (S(X) \otimes S(Y)) \otimes G \\ &f(gc \otimes g'c') = (gg')c \otimes c', \end{aligned}$$

Es folgt dann, das f sogar eine G-Kettenabbildung ist (Wie bei Vektorraum-Komplexen definiert man G-Kettenkomplexe $C = (C_k, \partial_k)$ für einer kommutativen Ring G mit Eins durch eine Familie $(C_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ von G-Moduln C_k und G-linearen Abbildungen $(\partial_k : C_k \to C_{k-1})_k$ mit $\partial_k = \partial_{k+1} = 0$. Ist nun

$$\lambda : H(X;G) \otimes H(Y;G) \to H\big(S(X) \otimes S(Y); G\big)$$

die natürliche Abbildung mit

$$\lambda([z] \otimes_G [z']) = [z \otimes_G z']$$

und P eine EZ-Trafo, so gilt für alle $\alpha \in H_p(X;G)$ und $\beta \in H_q(Y;G)$ $(p, q \in \mathbb{N}_0)$

$$\alpha \times_G \beta = (P_{XY} \otimes \mathrm{id})_* \circ f_* \circ \lambda(\alpha \otimes \beta),$$

denn mit $\alpha = [z]$ und $\beta = [z']$ sowie $z = \sum_i g_i c_i, z' = \sum_j g'_j c'_j$ ist:

$$\begin{aligned}
(P_{XY} \otimes \mathrm{id})_* \circ f_* \circ \lambda(\alpha \otimes \beta) &= \left[(P_{XY} \otimes \mathrm{id}) \circ \left(\sum_{i,j} (g_i g'_j) c_i \otimes c'_j\right)\right] \\
&= \left[\sum_{i,j} (g_i g'_j) P_{XY}(c_i \otimes c'_j)\right] \\
&= \alpha \times_G \beta
\end{aligned}$$

(c) Deshalb ist

$$\times_G : H(X;G) \times H(Y;G) \to H(X \times Y; G)$$

zunächst wohldefiniert und unabhängig von der Wahl der EZ-Trafo P, denn ist P' eine weitere EZ-Trafo, so ist mit $P_{XY} = P'_{XY}$ (via D_{XY}) auch $P_{XY} \otimes \mathrm{id}_G \simeq P'_{XY} \otimes \mathrm{id}$ (via $D_{XY} \otimes \mathrm{id}$), also

$$(P_{XY} \otimes \mathrm{id})_* = (P'_{XY} \otimes \mathrm{id})_*.$$

(d) Das G-Kreuzprodukt ist dann:

(1) G-bilinear (also auch $(g\alpha) \times \beta = g(\alpha \times \beta) \forall g \in G, \alpha \in H_p(X), \beta \in H_q(Y)$)

(2) natürlich

(3) graduiert kommutativ

(4) assoziativ

(5) respektiert neutrale Elemente,

wie das ganzzahlige Kreuzprodukt $x = x_{\mathbb{Z}}$ (Beweis von (1.28) mit G tensorieren.)

(1.34) Satz: Sei G ein Körper und X, Y topologische Räume. Dann liefert das G-Homologie-Kreuzprodukt einen Isomorphismus (den wir auch mit $\times_G$ bezeichnen)

$$\begin{aligned}
H(X;G) \otimes_G H(Y;G) &\to H(X \times Y; G) \\
\alpha \otimes_G \beta &\mapsto \alpha \times_G \beta
\end{aligned}$$

Beweis. Wir benutzen die Darstellung

$$\alpha \times_G \beta = (P_{XY} \otimes \mathrm{id})_* \circ f \circ \lambda(\alpha \otimes \beta)$$

Sei $Q = (Q_{XY})$ eine EZ-Transformation von F_2 nach F_1. Da

$$Q_{XY} \circ P_{XY} \simeq \mathrm{id}, P_{XY} \circ Q_{XY} \simeq \mathrm{id},$$

gilt auch

$$(P_{XY} \otimes \mathrm{id}) \circ (Q_{XY} \otimes \mathrm{id}) \simeq \mathrm{id}, \quad (Q_{XY} \otimes \mathrm{id}) \circ (P_{XY} \otimes \mathrm{id}) \simeq \mathrm{id}.$$

Also ist schon mal

$$(P_{XY} \otimes \mathrm{id})_* : H(S(Y) \otimes S(Y) \otimes G) \to H(X \times Y, G)$$

ein Isomorphismus.
Weiter ist sogar die Kettenabbildung f aus (1.33 (b)) ein Ketten-Isomorphismus, denn

$$\begin{aligned} f' : S(X) \otimes S(Y) \otimes G &\to (S(X) \otimes G) \otimes_G (S(Y) \otimes G) \\ f'(g(c \otimes c')) &= (gc) \otimes 1 \cdot c' \end{aligned}$$

ist offenbar invers zu f.
Schließlich ist im Körperfall

$$\lambda : H(X; G) \otimes_G H(Y; G) \to H\big((S(X) \otimes G) \otimes_G (S(Y) \otimes G)\big)$$

nach (1.4) ein Isomorphismus und daher die ganze Komposition $(P_{XY} \otimes \mathrm{id})_* \circ f_* \circ \lambda$. □

(1.35) Korollar:

Seien X und Y topologische Räume.

(a) Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $H_k(X)$ und $H_k(Y)$ endlich erzeugt. Dann ist auch $H_k(X \times Y)$ endlich erzeugt und für die k. Betti-Zahl $b_k(X \times Y)$ gilt:

$$b_k(X \times Y) = \sum_{p+q=k} b_p(X) b_q(Y)$$

(b) Sind sogar $H(X)$ und $H(Y)$ endlich erzeugt (z.B. wenn X und Y eine endliche CW-Struktur tragen), so ist auch $H(X \times Y)$ endlich erzeugt und es gilt:

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$$

Beweis. (a) Nach Alg.Top. II kann man die Bettizahlen von X durch die Homologie mit Koeffizienten in einem Körper der Charakteristik 0 berechnen (z.B. $B = \mathbb{Q}$):

$$b_k(X) = \dim_{\mathbb{Q}} H_k(X; \mathbb{Q})$$

Mit (1.33) ist nun

$$\begin{aligned} b_k(X \times Y) = \dim_{\mathbb{Q}} H_k(X \times Y; \mathbb{Q}) &= \dim_{\mathbb{Q}} \big(H(X; \mathbb{Q}) \otimes H(Y; \mathbb{Q})\big)_k \\ &= \dim_{\mathbb{Q}} \big(\oplus_{p+q=k} H_p(X; \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H_q(Y; \mathbb{Q})\big) \end{aligned}$$

Ist nun V ein G-Vektorraum (G Körper) der Dimension m mit Basis $(e_1, \dots, e_m)$ und W ein G-Vektorraum der Dimension n mit Basis $(e'_1, \dots, e'_n)$ so ist $V \otimes_G W$ ein G-Vektorraum der Dimension $m \cdot n$ mit Basis $e_i \times e'_j, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$. (Übung)
Deshalb ist

$$\begin{aligned} b_k(X \times Y) &= \sum_{p+q=k} \dim H_p(X) \dim_q(Y) \\ &= \sum_{p+q=k} b_p(X) b_q(Y) \end{aligned}$$

(b) Sind $H(X)$ und $H(Y)$ sogar endlich erzeugt, so auch nach der Künneth Formel $H(X \times Y)$. Für die Euler-Charakteristik ist dann

$$\chi(X \times Y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dim_{\mathbb{Q}}(X \times Y, \mathbb{Q})$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p+q=k} (-1)^p (-1)^q b_p(X) b_q(Y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^p b_p\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^q b_q\right) \\ &= \chi(X) \cdot \chi(Y)\end{aligned}$$

□

2 Cohomologie

(2.1) Erinnerung: Seien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ Kategorien. Es heißt $f : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ ein *kontravarianter Funktor* oder Cofunktor von $\mathcal{C}_1$ nach $\mathcal{C}_2$, wenn F jedem Objekt X in $\mathcal{C}_1$ ein Objekt $F(X)$ in $\mathcal{C}_2$ zuordnet und jedem Morphismus f in $\mathcal{C}_1$, $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$, einen Morphismus $F(f)$ in $\mathcal{C}_2$ mit $f \in \mathrm{Mor}(F(Y), F(X))$. (Beachte die Vertauschung in der Argumenten von Mor).
Dabei soll gelten:

(i) Für alle Objekte X, Y, Z in $\mathcal{C}_1$ und Morphismen $f \in \mathrm{Mor}(X, Y), g \in \mathrm{Mor}(Y, Z)$ ist:

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$$

Statt $F(f)$ schreibt man auch f^* (* für kontravariant und $_*$ für covariant), so dass man dann erhält:

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

(ii) Für alle Objekte X in $\mathcal{C}_1$ gilt:

$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$$

Oder kurz: $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$

(2.2) Beispiel: Sei G eine abelsche Gruppe.

(i) Für jede abelsche Gruppe A ist dann auch $\mathrm{Hom}(A, G) = \{\varphi : A \to G, \varphi \text{ ist Homomorphismus}\}$ eine abelsche Gruppe vermöge $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi + \psi$ mit $(\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a)$.

(ii) Ist $f : A \to B$ Homomorphismus zwischen abelschen Gruppen A und B, so nennen wir

$$f^* = \mathrm{Hom}(f; G) : \mathrm{Hom}(B; G) \to \mathrm{Hom}(A; G)$$
$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f$$

den zu f dualen Homomorphismus.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^*(\varphi)"'] & & B \arrow[dl, "\varphi"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Es folgt, dass $F = \mathrm{Hom}(\_; G) : \underline{\mathbf{Ab}} \to \underline{\mathbf{Ab}}$ ein kontravarianter Funktor ist, denn für $f : A \to B$, $g : B \to C$ gilt:

$$(g \circ f)^*(\varphi) = \varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f = f^*(g^*(\varphi)) = (f^* \circ g^*)(\varphi)$$

Für alle A und für alle Homomorphismen $\varphi : A \to G$ ist:

$$\mathrm{id}_A^*(\varphi) = \varphi \circ \mathrm{id} = \varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(A;G)}(\varphi)$$

(2.3) Beispiel: $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}; G) \cong G$ vermöge $\varphi \mapsto \varphi(1)$, denn zu einem $g \in G$ gibt es genau ein $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ mit $\varphi(1) = g$.

(2.4) Proposition: Sei G abelsche Gruppe und sei

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

eine exakte Sequenz abelscher Gruppen. Dann ist die induzierte Sequenz abelscher Gruppen

$$0 \to \mathrm{Hom}(C;G) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(B;G) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(A;G)$$

exakt.

Beweis. (i) Exaktheit bei $\mathrm{Hom}(C;G)$: Sei $\varphi : C \to G$ ein Homomorphismus mit $g^*(\varphi) = 0$, also $\varphi \circ g = 0$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "0"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Da g surjektiv ist, folgt $\varphi = 0$. Also ist g^* injektiv.

(ii) Exaktheit bei $\mathrm{Hom}(B;G)$:

(a) Es ist

$$f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = 0^* = 0$$

Also $\mathrm{im}(g^*) \subseteq \ker(f^*)$.

(b) Sei $\varphi : B \to G$ gegeben, mit $f^*(\varphi) = 0$, also $\varphi \circ f = 0$, dann ist $\ker(g) = \mathrm{im}(f) \subseteq \ker(\varphi)$, so dass es einen (eindeutig bestimmtes) $\overline{\varphi} : B/\ker(g) \to G$ gibt mit $\overline{\varphi} \circ \pi(\varphi)$, wo $\pi : B \to B/\ker(g)$ die kanonische Projektion ist.
Ebenso induziert dieser ein Homomorphismus

$$\overline{g} : B/\ker(g) \to C$$

mit $\overline{g} \circ \pi = g$, der wegen der Surjektivität von g sogar ein Isomorphismus ist. Wir können deshalb setzen:

$$\psi : C \to G$$
$$\psi := \overline{\varphi} \circ \overline{g}^{-1}$$

Dann ist also

$$\psi \circ \overline{g} = \overline{\varphi}$$

und damit kommutieren die drei Teildiagramme des folgenden Diagramms:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\pi"] \arrow[dd, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowleft"] & & C \arrow[ddll, bend left, "\psi"] \\
\arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & B/\ker(g) \arrow[ur, "\overline{g}"'] \arrow[dl, "\overline{\varphi}"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] & \\
G & &
\end{tikzcd}$$

Deshalb kommutiert das große:

$$\psi \circ g = \psi \circ \overline{g} \circ \pi = \varphi,$$

d.i. $g^*(\psi) = \varphi$. Also ist auch $\ker(f^*) \subseteq \operatorname{im}(g^*)$

$\square$

(2.5) Kommentar: Eine exakte kurze Sequenz

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

muss dagegen allerdings keine exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{Hom}(C;G) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}(B;G) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}(A;G) \to 0$$

nach sich ziehen, d.i., auch wenn f injektiv ist, ist nicht notwendig f^* surjektiv. Ist z.B. $A = B = \mathbb{Z}$ und $C = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sowie $f : A \to B, f(k) = 2k$ und $g = \pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ kanonisch, so ist

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

exakt , aber mit $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$f^* : \operatorname{Hom}(B;G) \to \operatorname{Hom}(A;G)$$

ist

$$f^*(\varphi)(k) = \varphi \circ f(k) = \varphi(2k) = 2\varphi(k) = 0,$$

für alle $\varphi \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, aber $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0$ also ist f^* nicht surjektiv.

(2.6) Erinnerung: Eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

spaltet, wenn es ein Rechtsinverses $r : C \to B$ von g gibt, $g \circ r = \mathrm{id}_C$, (bzw. äquivalent ein Linksinverses $l : B \to A$ von f, $l \circ f = \mathrm{id}_A$). In diesem Fall ist dann $B \cong A \oplus C$ (vermöge (l, g))

(2.7) Zusatz: ist

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

exakt und spaltet, so ist auch

$$0 \to \operatorname{Hom}(C;G) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}(B;G) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}(A;G) \to 0 \qquad (*)$$

exakt und spaltet auch.

Beweis. Ist $l : B \to A$ linksinvers zu f (eine *Spaltung*), $l \circ f = \mathrm{id}_A$, so ist

$$\mathrm{id}_{\operatorname{Hom}(A;G)} = \mathrm{id}_A^* = (l \circ f)^* = f^* \circ l^*$$

Also ist f^* zunächst mal surjektiv, also (*) exakt, und dann, dass f^* Spaltung von (*) ist. $\square$

(2.8) Erinnerung: Sei A eine abelsche Gruppe . Die *standard-Auflösung* von A

$$S(A): \qquad 0 \to R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} A \to 0$$

war gegeben durch $F := \mathbb{F}(A)$ die freie abelsche Gruppe über der Menge A und π gegeben durch

$$\pi(a) = a$$

und $R := \ker(\pi)$ sowie $i : R \hookrightarrow F$ die Inklusion.
Damit ist $S(A)$ eine *freie Auflösung*, da mit F auch R als Untergruppe wieder frei ist.

Um ein Maß für das Fehlen der Exaktheit der Sequenz zu bekommen, wenn man $\mathrm{Hom}(\_, G)$, für eine abelsche Gruppe G, anwendet, macht man nun folgendes (vgl. die Definition von $\mathrm{Tor}(A, G)$).

(2.9) Definition: Sei A eine abelsche Gruppe und

$$0 \to R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} A \to 0$$

ihre Standard-Auflösung. Sei G eine weitere abelsche Gruppe und

$$i^* = \mathrm{Hom}(i, G) : \mathrm{Hom}(F, G) \to \mathrm{Hom}(R, G)$$

von i induziert. Dann heißt

$$\mathrm{Ext}(A, G) := \mathrm{coker}(i^*)(= \mathrm{Hom}(R, G)/\mathrm{im}(i^*))$$

das *Extensions-Produkt von A mit G* (kurz: *Ext-Produkt*).

(2.10) Kommentar: Für die Standard-Auflösung

$$0 \to R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} A \to 0$$

wird also (nach Definition) mit der kanonischen Projektion

$$\nu : \mathrm{Hom}(R, G) \to \mathrm{Ext}(R, G)$$

die induzierte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}(A; G) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}(F; G) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}(R; G) \xrightarrow{\nu} \mathrm{Ext}(A, G) \to 0$$

exakt. Aber was geschieht mit anderen freien Auflösungen von A?

(2.11) Erinnerung: Sind S und S' freie Auflösungen abelscher Gruppen A und A' und ist $h : A \to A'$ ein Homomorphismus, so gilt:

(a) Es gibt Homomorphismen $g : F \to F'$ und $f : R \to R'$, so dass (*) kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
S: & 0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
S': & 0 \arrow[r] & G' \arrow[r] & F' \arrow[r] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{*}$$

(b) Sind $\tilde{g} : F \to F'$ und $\tilde{f} : G \to G'$ (weitere) Homomorphismen, so dass (*) mit $(\tilde{f}, \tilde{g})$ kommutativ wird, so gibt es einen Homomorphismus $\alpha : F \to R'$ mit

$$j' \circ \alpha = \tilde{g} - g, \quad \alpha \circ j = \tilde{f} - f,$$

$$\begin{tikzcd}
S: & 0 \arrow[r] & G \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\tilde{f} - f"'] & F \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{g} - g"] \arrow[dl, "\alpha"'] & A \arrow[r] & 0 \\
S': & 0 \arrow[r] & G' \arrow[r, "j'"'] & F' \arrow[r] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(2.12) Proposition: Seien A und A' abelsche Gruppen,

$$S: \quad 0 \to R \xrightarrow{j} F \to A \to 0$$
$$S': \quad 0 \to R' \xrightarrow{j} F' \to A' \to 0$$

freie Auflösungen von A bzw. A' sowie $h : A \to A'$ ein Homomorphismus. Dann gibt es genau einen Homomorphismus

$$\Phi = \Phi(h; S, S') : \operatorname{coker}((j)*) \to \operatorname{coker}(j^*)$$

(wo $*$ den Hom-Funktor $\operatorname{Hom}(\_, G)$ für eine abelsche Gruppe G bezeichnet), so dass gilt: Sind $g : F \to F'$ und $f : R \to R'$ beliebige Homomorphismen, so dass $(f, g, h) : S \to S'$ Homomorphismus zwischen kurzen exakten Sequenzen ist, so kommutiert auch folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
S: & 0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(A;G) \arrow[r] \arrow[r, phantom, shift right=6ex, "\circlearrowleft"] & \operatorname{Hom}(F;G) \arrow[r, "j^*"] \arrow[r, phantom, shift right=6ex, "\circlearrowleft"] & \operatorname{Hom}(R;G) \arrow[r, "\nu"] \arrow[r, phantom, shift right=6ex, "\circlearrowleft"] & \operatorname{coker}(j^*) \arrow[r] & 0 \\
S: & 0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(A';G) \arrow[r] \arrow[u, "h^*"] & \operatorname{Hom}(F';G) \arrow[r, "(j')^*"] \arrow[u, "g^*"'] & \operatorname{Hom}(R';G) \arrow[r, "\nu'"] \arrow[u, "f^*"] & \operatorname{coker}((j')^*) \arrow[r] \arrow[u, "\Phi"] & 0
\end{tikzcd} \qquad (**)$$

(2.13) Kommentar: Das Besondere an (2.12) ist nicht so sehr die Existenz und Eindeutigkeit von Φ, so dass (**) kommutiert, denn es gibt sicher nur einen Kandidaten, nämlich

$$\Phi([\varphi]) = [f^*(\varphi)]$$

$\forall \varphi \in \operatorname{Hom}(R', G)$ (Wohldefiniertheit muss natürlich geprüft werden). Es ist vielmehr die Unabhängigkeit von der Wahl (f, g), die $(f, g, h) : S \to S'$ zu einem Homomorphismus zwischen kurzen exakten Sequenzen macht.

Beweis von (2.12). Wegen $f^* \circ (j')^* = j^* \circ g^*$ ist,

$$f^*(\operatorname{im}((j')^*)) \subseteq \operatorname{im}(j^*)$$

also ist $\nu \circ f^*(\operatorname{im}((j')^*) = 0$. Also gibt es genau ein $\Phi : \operatorname{coker}((j')^*) \to \operatorname{coker}(j^*)$, mit $\Phi \circ \nu' = \nu \circ f^*$, also

$$\Phi([\varphi]) = [f^* \varphi], \forall \varphi \in \operatorname{Hom}(R', G)$$

Ist $(\tilde{f}, \tilde{g})$ eine weitere Wahl, die (*) kommutieren lässt und $\alpha : F \to R'$ mit $\alpha \circ j = \tilde{f} - f$. So ist

$$j^* \circ \alpha^* = \tilde{f}^* - f^*,$$

also
$$\tilde{f}^*(\varphi) - f^*(\varphi) \in \operatorname{im}(j^*)$$
Macht daher $\tilde{\Phi}$ (**) kommutativ (mit $\tilde{f}$ statt f und $\tilde{g}$ statt g), so ist deshalb
$$\tilde{\Phi}([\varphi]) = [\tilde{f}^*(\varphi)] = [f^*(\varphi)] = \Phi([\varphi])$$
für alle $\varphi \in \operatorname{Hom}(R', G)$. □

(2.14) Korollar: Definiert man eine Kategorie $\mathcal{C}$ dadurch, dass die Objekte freie Auflösungen
$$S: \quad 0 \to R \to F \to A \to 0$$
abelscher Gruppen sind und die Morphismen von $\mathcal{C}$ durch Homomorphismen $h: A \to A'$ gegeben sind,
$$\begin{tikzcd} S: & 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "j"] & F \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\ S': & 0 \arrow[r] & R' \arrow[r, "j'"'] & F' \arrow[r] & A' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
(und die Komposition ist nun offensichtlich), so ist die Zuordnung $\Phi: \mathcal{C} \to \underline{\mathbf{Ab}}$, gegeben auf den Objekten S durch $\Phi(S) = \operatorname{coker}(j^*)$ (mit festem G) und auf den Morphismen $h: S \to S'$ durch
$$\Phi(h) = \Phi(h; S, S')$$
funktoriell, also

(a) $\Phi(\mathrm{id}; S, S) = \mathrm{id} \quad \forall S$

(b) $\Phi(h' \circ h; S, S'') = \Phi(h; S, S') \circ \Phi(h', S', S'')$ für alle $h: S \to S', h': S' \to S''$.

Beweis. (Vgl. Alg.Top. II)

(a) Ist $h = \mathrm{id}: S \to S'$, so kann man $f = \mathrm{id}$ und $g = \mathrm{id}$ wählen und erhält
$$\Phi(\mathrm{id}; S, S) = \mathrm{id}.$$

(b) Sind (f, g) bzw (f', g') für $h: S \to S'$ und $h': S' \to S''$ schon gewählt, so ist $(f' \circ f, g' \circ g, h' \circ h): S \to S''$ ein Homomorphismus zwischen kurzen exakten Sequenzen, weil nun sowohl $\Phi(h'h; S, S'')$ als auch $\Phi(h; S, S') \circ \Phi(h'; S', S'')$ das Diagramm (**) mit $((f'f)^*, (g'g)^*, (h'h)^*)$ kommutieren lässt, ist nach (2.12)
$$\Phi(h' \circ h; S, S'') = \Phi(h; S, S') \circ \Phi(h'; S', S'')$$

□

(2.15) Kommentar: (a) Ist $h: A \to A'$ ein Isomorphismus, so muss also für zwei Auflösungen S und S' von A bzw. A'
$$\Phi(h; S, S'): \operatorname{coker}(j'^*) \to \operatorname{coker}(j^*)$$
Isomorphismus sein (denn $\Phi(h^{-1}; S', S)$ ist Inverses von $\Phi(h; S, S')$).

(b) Ist insbesondere $h = \mathrm{id}$, so gilt für eine beliebige Auflösung S von A und der Standard-Auflösung $S(A)$, dass

$$\Phi(\mathrm{id}; S, S(A)) : \mathrm{Ext}(A, G) \to \mathrm{coker}(j^*)$$

ein Isomorphismus ist. Es hängt also der Isomorphietyp von $\mathrm{coker}(j^*)$ nicht von der Wahl der freien Auflösung von A ab.

(2.16) Beispiel: (a) Ist A eine freie abelsche Gruppe, so ist

$$\mathrm{Ext}(A, G) = (0)$$

für beliebiges G, denn dann ist

$$0 \to 0 \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\mathrm{id}} A \to 0$$

eine freie Auflösung und damit

$$\mathrm{Ext}(A, G) = \mathrm{coker}\big(j^* : \mathrm{Hom}(A, G) \to \mathrm{Hom}(0, G) = (0)\big) = (0)$$

(b) Für zwei abelsche Gruppen A_1 und A_2 und beliebigem G ist

$$\mathrm{Ext}(A_1 \oplus A_2, G) \cong \mathrm{Ext}(A_1, G) \oplus \mathrm{Ext}(A_2, G),$$

denn für zwei Auflösungen

$$S_i : 0 \to R_i \xrightarrow{j_i} F_i \to Ai \to 0 \qquad (i = 1, 2)$$

ist

$$S_1 \oplus S_2 : 0 \to R_1 \oplus R_2 \xrightarrow{j_1 \oplus j_2} F_1 \oplus F_2 \to A_1 \oplus A_2 \to 0$$

wieder freie Auflösung. Deshalb ist (bei $S_i = S(A_i)$)

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}(A_1 \oplus A_2, G) = \mathrm{coker}((j_1 \oplus j_2)^*) &\cong \mathrm{coker}(j_1^*) \oplus \mathrm{coker}(j_2^*) \\ &= \mathrm{Ext}(A_1, G) \oplus \mathrm{Ext}(A_2, G) \end{aligned}$$

(c) Bezeichnet (wie früher schon) für eine abelsche Gruppe G und $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$n \cdot G = \{n \cdot g : g \in G\}$$

(z.B. $0 \cdot G = (0), 1 \cdot G = G$), so gilt mit $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}_0 = (0), \mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}$):

$$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, G) \cong G/nG.$$

Es ist nämlich

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{j \times j_n} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_n \to 0$$

mit $j_n(k) = n \cdot k, k \in \mathbb{Z}$ (und π kanonisch), eine freie Auflösung von $\mathbb{Z}_n$. Identifiziert man nun noch $Hom(\mathbb{Z}, G)$ mit G (vermöge $\varphi \mapsto \varphi(1)$), so lautet die duale Sequenz:

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n, G) \xrightarrow{\pi_*} G \xrightarrow{j_n^*} G$$

mit

$$f_n^*(g) = n \cdot g$$

Also ist

$$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, G) = \mathrm{coker}(j_n^*) = G/nG.$$

Beachte, das z.B.

$$\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_n \ncong (0) \cong \operatorname{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n)$$

(für $n \geqslant 2$); bereits

$$\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \cong (0) \ncong \mathbb{Z}_n \cong \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n).$$

Also weder Hom(_, _) noch Ext(_, _) sind symmetrisch. (Im Gegensatz zu _⊗_ und Tor(_, _))

(d) Ist insbesondere die Koeffizientengruppe G (die unterliegende Gruppe ein(es) Körper(s) der Charakteristik Null, z.B. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, so ist $nG \cong G$, $\forall n \geqslant 1$, denn jedes $g \in G$ kann man durch $n = 1 + \ldots + 1$ (n-mal teilen, $n \neq 0$.
Also ist

$$\operatorname{Ext}(\mathbb{Z}_n, G) = (0), \forall n \in \mathbb{N}$$

(e) Ist A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe (also

$$A \cong \mathbb{Z}^b \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_r}$$

mit $b, r \in \mathbb{N}_0, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$) und G ein Körper der Charakteristik Null, so gilt wegen (a)-(d):

$$\operatorname{Ext}(A, G) = (0).$$

(2.17) Definition: Seien A und B abelsche Gruppen und $f : A \to B$ ein Homomorphismus. Wir nennen dann

$$f^* = \operatorname{Ext}(f, G) = \Phi(f; S(A), S(B)) : \operatorname{Ext}(B, G) \to \operatorname{Ext}(A, G)$$

(bei vorgegebenem G) den von f induzierten Homomorphismus.

(2.18) Kommentar: Es wird dann (bei festem G) $\operatorname{Ext}(\_, G) : \underline{\mathbf{Ab}} \to \underline{\mathbf{Ab}}$ gegeben durch

$$A \mapsto \operatorname{Ext}(A, G)$$
$$f \mapsto \operatorname{Ext}(f, G)$$

zu einem kontravarianten Funktor, denn wegen (2.14) ist tatsächlich

$$\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$$
$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

(2.19) Definition: Ein Cokettenkomplex (C, δ) besteht aus einer Familie $C = (C^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ abelscher Gruppen und einer Familie von Homomorphismen $\delta^k : C^k \to C^{k+1}$, so dass für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\delta^{k+1} \circ \delta^k = 0$$

(2.20) Kommentar: (a) Man nennt die Homomorphismen $\delta^k : C^k \to C^{k+1}$ die Corandoperatoren von (C, δ).

(b) Setzt man für ein Cokettenkomplex (C, δ) einfach

$$C_k := C^{-k}, \partial_k := \delta^{k-1}$$

so erhält man offenbar einen Kettenkomplex (C_*, ∂) (und umgekehrt). Auf diese Weise kann man nun alle Begriffe von Kettenkomplexe auf Cokettenkomplexe übertragen, z.B.:

(i) Es heißen die Elemente von
$$Z^k(C) = \ker(\delta^k)$$
die *Cozyklen* von C und
$$B^k(C) = \operatorname{im}(\delta^{k-1})$$
die *Coränder* von C. Weiter heißt
$$H^k(C) := Z^k(C)/B^k(C)$$
(wegen $\delta^2 = 0$ ist $B^k(C) \subseteq Z^k(C)$ Untergruppe) die *k-te Cohomologiegruppe von* (C, δ).

(ii) Für zwei Cokettenkomplexe (C, δ) und (C', δ') heißt eine Familie $f = \left(f^k : C^k \to (C')^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$, wir schreiben $f : C \to C'$, eine *Cokettenabbildung von* C *nach* C', wenn
$$(\delta')^k \circ f^k = f^{k+1} \circ \delta^k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$
gilt. Eine Cokettenabbildung $f : C \to C'$ induziert in funktorieller Weise einen Homomorphismus
$$f_* : H^k(C) \to H^k(C')$$
durch
$$f_*([\alpha]) = [f^k(\alpha)], \quad \forall \alpha \in Z^k(C).$$

(iii) Eine Familie von Homomorphisme
$$D = \left(D^k : C^k \to (C')^{k-1}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$$
heißt Cokettenhomotopie (kurz Homotopie) zwischen zwei Cokettenabbildungen $f, g : C \to C'$, präziser von f nach g, $D : F \simeq g$, wenn für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt:
$$(\delta')^{k-1} \circ D^k + D^{k+1} \circ \delta^k = g^k - f^k.$$
Es ist dann
$$f_* = g_*$$

(c) (i) Ist
$$0 \to C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \to 0 \tag{*}$$
eine kurze exakte Sequenz von Cokettenabbildungen, so existiert ein natürlicher Homomorphismus, genauer eine natürliche Transformation zwischen geeigneten Funktoren auf geeigneten Kategorien,
$$\delta^k_* : H^k(C'') \to H^{k+1}(C').$$
so das folgende lange Kohomologiesquenz von (*) exakt wird:
$$\ldots \xrightarrow{\delta^{k-1}_*} H^k(C') \xrightarrow{f_*} H^k(C) \xrightarrow{g_*} H^k(C'') \xrightarrow{\delta^k_*} H^{k+1}(C') \xrightarrow{f_*} \ldots$$

(ii) Induziert für zwei Teilkomplexe $C', C'' \subseteq C$ die Inklusion $i : C' + C'' \to C$ einen Isomorphismus in der Cohomologie
$$i_* : H^k(C' + C'') \xrightarrow{\cong} H^k(C), \quad k \in \mathbb{Z},$$
(es heißt (C', C'') ein Ausschneidungspaar) so hat man eine (natürliche) lange exakte Mayer-Vietoris- Sequenz
$$\ldots \to H^k(C' \cap C) \xrightarrow{\mu} H^k(C') \oplus H^k(C'') \xrightarrow{\nu} H^k(C) \xrightarrow{\Delta} H^{k+1}(C' \cap C') \to \ldots$$
wobei μ, ν und Δ entsprechend definiert werden.

(2.21) Beispiel: Sei (C_k, ∂_k) ein Kettenkomplex und G eine abelsche Gruppe. Durch Anwenden von $\mathrm{Hom}(\_, G)$ erhält man den *zugehörigen Cokettenkomplex*

$$\begin{aligned} C^k &:= \mathrm{Hom}(C_k, G) \\ \delta^k &:= \partial_{k+1}^* \end{aligned}$$

mit

$$\begin{tikzcd} \cdots \to \mathrm{Hom}(C_{k-1}, G) \arrow[r, "\delta^{k-1} = \partial_k^*"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}(C_k, G) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}(C_{k+1}, G) \to \cdots \arrow[d, equal] \\ C^{k-1} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "0"'] & C^k \arrow[r] & C^{k+1} \end{tikzcd}$$

Wir nennen dann

$$H^k(C; G) = \ker(\delta^k)/\mathrm{im}(\delta^{k-1}) = H^k(\mathrm{Hom}(C, G))$$

die *k-te Cohomologiegruppe des Kettenkomplexes* (C, ∂) *mit Koeffizienten in* G.

(2.22) Definition: Sei $(C_k, \partial_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ Kettenkomplex und $(C^k, \delta^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ der induzierte Cokettenkomplex mit Koeffizienten in G (G abelsche Gruppe). Wir notieren mit

$$\begin{aligned} \langle \_, \_ \rangle &: C^k \times C_k \to G \\ \langle \varphi, c \rangle &= \varphi(c) \end{aligned}$$

die natürliche Paarung zwischen C^k und C_k ($k \in \mathbb{Z}, \varphi \in C^k, c \in C_k$).

(2.23) Kommentar: (a) Es ist $\langle \_, \_ \rangle$ bilinear, d.h.

$$\begin{aligned} \langle \varphi + \varphi', c \rangle &= \langle \varphi, c \rangle + \langle \varphi', c \rangle, \quad \forall \varphi, \varphi' \in C^k, c \in C_k \\ \langle \varphi, c + c' \rangle &= \langle \varphi, c \rangle + \langle \varphi, c' \rangle, \quad \forall \varphi \in C^k, c, c' \in C_k \end{aligned}$$

(Vorsicht, der induzierte Homomorphismus

$$\begin{aligned} C_k &\to \mathrm{Hom}(C^k, G) \\ c &\mapsto [\varphi \mapsto \langle \varphi, c \rangle] \end{aligned}$$

ist i.a. weder injektiv noch surjektiv.

(b) Es gilt die *Corand-Rand-Formel*:

$$\langle \delta^k \varphi, c \rangle = \langle \varphi, \partial_{k+1} c \rangle, \varphi \in C^k, c \in C_{k+1}, k \in \mathbb{Z}$$

denn

$$\langle \delta\varphi, c \rangle = (\delta\varphi)(c) = (\partial^*\varphi)(c) = (\varphi \circ \partial)(c) = \varphi(\partial c) = \langle \varphi, \partial c \rangle$$

(2.24) Bemerkung: (a) Ist $\alpha \in C^k$ ein Cozyklus, $\alpha \in Z^k$, und $z \in C_k$ ein Rand, $z \in B_k$, so ist

$$\langle \alpha, z \rangle = 0$$

(b) Und ist $\alpha \in C^k$ ein Corand, $\alpha \in B^k$, und $z \in C_k$ ein Zyklus, $z \in Z_k$, so ist

$$\langle \alpha, z \rangle = 0$$

Beweis. (a) $z \in B_k$, also $z = \partial c$, für ein $c \in C_{k+1}$:

$$\langle \alpha, z \rangle = \langle \alpha, \partial c \rangle = \langle \delta\alpha, c \rangle = \langle 0, c \rangle = 0$$

(b) $\alpha \in B^k$, also $\alpha = \partial\varphi$, für ein $\varphi \in C^{k-1}$:

$$\langle \alpha, z \rangle = \langle \delta\varphi, z \rangle = \langle \varphi, \partial z \rangle = \langle \varphi, 0 \rangle = 0$$

□

(2.25) Kommentar: Nach den Homomorphisatz drückt sich daher die Paarung $\langle \_, \_ \rangle : C^k \times C_k \to G$ in natürlicher Weise auf die Paarung der Cohomologie $H^k(C; G)$ und der (ganzzahligen) Homologie $H_k(C)$ durch, die wir wieder mit $\langle \_, \_ \rangle$ bezeichnen:

$$\begin{tikzcd}
Z^k \times Z_k \arrow[r, "\langle _, _ \rangle|_{Z^k \times Z_k}"] \arrow[d, "\pi^k \times \pi_k"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G \\
H^k(C; G) \times H_k(C) \arrow[ur, dashed, "\langle _, _ \rangle"'] &
\end{tikzcd}$$

($\pi^k : Z^k \to H^k(C; G)$ und $\pi_k : Z_k \to H_k(C)$ kanonisch.) Es ist also wohldefiniert.

(2.26) Definition: Sei (C_k, ∂_k) ein Kettenkomplex, G eine abelsche Gruppe und (C^k, δ^k) der induzierte Cokettenkomplex. Dann definiert man die natürliche Paarung zwischen Cohomologie mit Koeffizienten in G und Homologie

$$\langle \_, \_ \rangle : H^k(C; G) \times H_k(C) \to G$$

durch

$$\langle [\alpha], [z] \rangle \mapsto \langle \alpha, z \rangle$$

(2.27) Kommentar: Man bekommt auf diese Weise also einen (natürlichen) Homomorphismus:

$$\kappa : H^k(C; G) \to \mathrm{Hom}(H_k(C), G)$$
$$\kappa([\alpha])([z]) \mapsto \langle [\alpha], [z] \rangle$$

Frage: Ist κ ein Isomorphismus?

(2.28) Ab sofort: Zusätzliche Voraussetzung: Wir nehmen ab nun an, dass (C, δ) ein *freier* Kettenkomplex ist, d.h. dass alle Kettengruppen frei sind, und benutzen (wie früher schon) die folgende Tatsache (vgl. Scheja/Storch : Algebra, §61): Jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist selbst wieder frei.

(2.29) Vorbereitung: (a) Bezeichne zunächst mit i_k und j_k die Inklusion

$$i_k : B_k \hookrightarrow Z_k, \quad j_k : Z_k \hookrightarrow C_k$$

und mit $\partial' : C_k \to B_{k-1}, \partial'_k c := \partial_k c$, also

$$j_{k-1} \circ i_{k-1} \circ \partial'_k = \partial_k$$

Beachte die exakte Sequenz

$$0 \to Z_k \xrightarrow{j_k} C_k \xrightarrow{\partial'_k} B_{k-1} \to 0 \tag{*}$$

Weil mit C_{k-1} auch $B_{k-1} \subseteq C_{k-1}$ frei ist, spaltet (*). Es gibt also ein Linksinverses von j_k,

$$l_k \circ j_k = \mathrm{id}_{Z_k}$$

Es ist dann auch folgende Sequenz exakt (und spaltet):

$$0 \to \mathrm{Hom}(B_{k-1}; G) \xrightarrow{(\partial'_k)^*} \mathrm{Hom}(C_k; G) \xrightarrow{(j_k)^*} \mathrm{Hom}(Z_k; G) \to 0.$$

(b) Betrachte außerdem die kurze exakte Sequenz

$$0 \to B_{k-1} \xrightarrow{i_{k-1}} Z_{k-1} \xrightarrow{p_{k-1}} H_{k-1} \to 0 \tag{**}$$

Es ist dann

$$0 \to \mathrm{Hom}(H_{k-1}; G) \xrightarrow{p^*_{k-1}} \mathrm{Hom}(Z_{k-1}; G) \xrightarrow{i^*_{k-1}} \mathrm{Hom}(B_{k-1}; G)$$

(2.30) Lemma: Es ist

$$\mathrm{im}((\partial'_k)^*) \subseteq Z^k(C; G)$$
$$(\partial'_{k-1})^*(\mathrm{im}(i^*_{k-1})) \subseteq B^k(C; G)$$

und daher induziert $(\partial'_k)^*$ einen Homomorphismus

$$h : \mathrm{Hom}(B_{k-1}; G)/\mathrm{im}(i^*_{k-1}) \to Z^k(C; G)/B^k(C; G)$$

mit

$$[\varphi] \mapsto [(\partial'_k)^*\varphi]$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(B_{k-1}; G) \arrow[r, "(\partial'_k)^*"] \arrow[d, "\pi^{k-1}"'] & Z^k(C; G) \subseteq C^k = \mathrm{Hom}(C_k; G) \arrow[d, "\pi^k"] \\
\mathrm{Hom}(B_{k-1}; G)/\mathrm{im}(i^*_{k-1}) \arrow[r, dashed, "h"] & Z^k(C; G)/B^k(C; G) = H^k(C; G)
\end{tikzcd}$$

Beweis. (i) Für $\varphi \in \mathrm{Hom}(B_{k-1}; G)$ ist

$$\delta^k((\partial'_k)^*\varphi) = \delta^k(\varphi \circ \partial'_k) = \varphi \circ \underbrace{\partial'_k \circ \partial_{k+1}}_{=0} = 0$$

also

$$\mathrm{im}((\partial'_k)^*) \subseteq Z^k(C; G).$$

(ii) Sei $\varphi \in \mathrm{im}(i_{k-1}^*) \subseteq \mathrm{Hom}(B_{k-1}; G)$, also $\varphi = i_{k-1}^*(\varphi')$ für ein $\varphi' \in \mathrm{Hom}(Z_{k-1}; G)$, d.i.

$$\varphi = \varphi' \circ i_{k-1}$$

(d.h. $\varphi' : Z_{k-1} \to G$ ist eine Fortsetzung von $\varphi : B_{k-1} \to G$). Weil aber (*) spaltet (mit $k-1$ statt k) existiert sogar eine Fortsetzung von φ auf ganz C_{k+1}: Ist nämlich l_{k-1} linksinvers zu j_{k-1}, $l_{k-1} \circ j_{k-1} = \mathrm{id}$, so setze $\psi : C_{k-1} \to G$

$$\psi = \varphi' \circ l_{k-1}$$

Dann ist:

$$\psi \circ j_{k-1} \circ i_{k-1} = \varphi' \circ \underbrace{l_{k-1} \circ j_{k-1}}_{=\mathrm{id}} \circ i_{k-1} = \varphi.$$

(also $\psi | B_{k-1} = \varphi$). Es folgt:

$$\delta^{k-1}\psi = \psi \circ \partial_k = \psi \circ j_{k-1} \circ i_{k-1} \circ \partial_k' = \varphi \circ \partial_k' = (\partial_k')^*(\varphi),$$

also

$$(\partial_k')^*(\varphi) \in B^k(C; G)$$

$\square$

(2.31) Vorbereitung: Weil schließlich (**) eine freie Auflösung von $H_{k-1}(C)$ ist, (denn mit, mit C_{k-1} sind auch Z_{k-1} und B_{k-1} frei) haben wir einen (natürlichen) Isomorphismus

$$\Phi : \mathrm{Ext}(H_{k-1}(C); G) \to \mathrm{coker}(i_{k-1}^*) = \mathrm{Hom}(B_{k-1}; G)/\mathrm{im}(i_{k-1}^*)$$

Fassen wir Φ und h zusammen, so erhalten wir einen natürlichen Homomorphismus

$$\rho := h \circ \Phi : \mathrm{Ext}(H_{k-1}(C); G) \to H^k(C; G)$$

Es gilt nun:

(2.32) Satz: (Universelles Koeffiziententheorem). Sei (C, δ) ein freier Kettenkomplex, G eine abelsche Gruppe und für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Homomorphismen ρ und κ wie in (2.31) und (2.27). Dann ist die folgende kurze Sequenz abelscher Gruppen exakt und spaltet:

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{k-1}(C); G) \xrightarrow{\rho} H^k(C; G) \xrightarrow{\kappa} \mathrm{Hom}(H_k(C); G) \to 0$$

Beweis. (i) ρ injektiv: Es ist

$$\rho = h \circ \Phi$$

wobei Φ Isomorphismus ist. Also bleibt zu zeigen, dass

$$h : \mathrm{coker}(i_{k-1}^*) = \mathrm{Hom}(B_{k-1}; G)/\mathrm{im}(i_{k-1}^*) \to H^k(C, G)$$

injektiv ist. Sei dazu $\varphi : B_{k-1} \to G$ Homomorphismus mit $h([\varphi]) = 0$. d.h.

$$0 = \partial_k'^*(\varphi) = \varphi \circ \partial_k' \qquad \mathrm{mod}\ B^k$$

d.h. es existiert ein Homomorphismus $\psi : C_{k-1} \to G$ s.d.

$$\varphi \circ \partial_k' = \delta^{k-1}(\psi) = \psi \circ \partial_k = \psi \circ j_{k-1} \circ \partial_k'$$

Es ist ∂_k' surjektiv und daher:

$$\varphi = \psi \circ j_{k-1} \circ i_{k-1} = i_{k-1}^*(\psi \circ j_{k-1}) \in \mathrm{im}(i_{k-1}^*)$$

Und folglich $[\varphi] = 0$.

(ii) $\operatorname{im}(\rho) \subseteq \ker(\kappa)$: Sei dazu $\varphi : B_{k-1} \to G$ Homomorphismus und

$$\psi := \varphi \circ \partial'_k. \text{ d.h. } [\psi] = h([\varphi])$$

sei nun $z \in Z_q$ beliebig, dann ist

$$(\kappa \circ h)([\varphi])([z]) = \kappa([\psi])([z]) = \langle [\psi], [z] \rangle = \langle \varphi \circ \partial'_k, z \rangle = \varphi \underbrace{(\partial'_k)(z))}_{=0} = 0$$

(iii) $\ker(\kappa) \subseteq \operatorname{im}(\rho)$: Sei dazu $\psi \in Z^k$, s.d. $\langle \psi, z \rangle = 0\ \forall z \in Z_k$. d.h. also $[\psi] \in \ker(\kappa)$.
Beh: $\exists \varphi : B_{k-1} \to G$ Homomorphismus, s.d.

$$\psi = \varphi \circ \partial'_k$$

Da nun $\langle \psi, z \rangle = 0\ \forall z \in Z_k$ gilt:

$$j_k^*(\psi) = \psi \circ j_k = 0 \qquad (j_k : Z_k \hookrightarrow C_k)$$

nun ist

$$0 \to \operatorname{Hom}(B_{k-1}; G) \xrightarrow{\partial_k'^*} \operatorname{Hom}(C_k; G) \to \operatorname{Hom}(Z_k; G) \to 0$$

exakt (vgl. (2.3)). Daher existiert $\varphi \in \operatorname{Hom}(B_{k-1}, G)$ s.d. $\partial_k'^*(\varphi) = \psi$, d..h.

$$\varphi \circ \partial'_k = \psi$$

Also ist $[\psi] = [\varphi \circ \partial'_k] = h([\varphi]) \in \operatorname{im}(h)$.
Da nun Φ ein Isomorphismus ist, ist $[\psi]$ im Bild von ρ.

(iv) κ hat ein Rechtsinverses (und ist damit surjektiv). Sei dazu $\lambda : H_k(C) \to G$ beliebig und sei

$$l_k : C_k \to Z_k$$

linksinvers zu

$$j_k : Z_k \to C_k$$

(dieses existiert, da C_k frei ist).
Setzte dann $\varphi : C_k \to G$ durch

$$\varphi := \lambda \circ p_k \circ l_k \qquad (p_k : Z_k \to H_k \text{ kanonische Projektion})$$

Dann ist $\operatorname{im}(l_k \circ \partial_{k+1}) = \operatorname{im}(\partial_{k+1}) = B_k$, denn

$$\left(j_k \circ l_k|_{Z_k} = \text{id und } B_k \subseteq Z_k\right)$$

l_k ist (per Definition) surjektiv.

$$\delta^k(\varphi) = \varphi \circ \partial_{k-1} = \lambda \circ \underbrace{p_k \circ \underbrace{l_k \circ \partial_{k+1}}_{=B_k}}_{=0} = 0$$

damit ist $\varphi_k \in Z_k$ und für alle $z \in Z_k$ ist:

$$\begin{aligned}
\kappa([\varphi])([z]) &= \langle \varphi, j_k(z) \rangle \\
&= \varphi \circ j_k(z) \\
&= \lambda \circ p_k \circ \underbrace{l_k \circ j_k}_{=\text{id}}(z) \\
&= \lambda \circ p_k \circ (z) \\
&= \lambda([z])
\end{aligned}$$

d.h. $\kappa(\varphi) = \lambda$. Damit ist die Abbildung

$$\begin{aligned} r : \mathrm{Hom}(H_k(C), G) &\to H^k(C; G) \\ \lambda &\mapsto [\lambda \circ p_k \circ l_k] \end{aligned}$$

ein Homomorphismus und rechtsinvers zu κ.

□

(2.33) Kommentar: (a) Aufgrund der Spaltung erhalten wir eine Isomorphie

$$H^k(C, G) \cong \mathrm{Hom}(H_k(C); G) \oplus \mathrm{Ext}(H_{k-1}(C), G) \qquad (***)$$

(b) Die Kurze exakte Sequenz ist natürlich, denn für eine Kettenabbildung $f : C \to C'$ (C, C' freie Kettenkomplexe) kommutiert:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_{k-1}(C); G) \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{Hom}(C; G) \arrow[r, "\kappa"] & \mathrm{Hom}(H_k(C); G) \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_{k-1}(C'); G) \arrow[r, "\rho'"] \arrow[u, "f^*"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}(C'; G) \arrow[r, "\kappa'"] \arrow[u, "f^*"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}(H_k(C'); G) \arrow[r] \arrow[u, "f^*"] & 0 \end{tikzcd}$$

(f^* jeweils induzierte Abbildung von f). Der Isomorphismus (***) ist nicht natürlich ([Stöcker/Zieschang S. 264/285])

(c) Ist die Homologie von (C, ∂) endlich erzeugt (C frei), so kann man die Cohomologie von C mit Koeffizienten in G direkt berechnen, wenn $G = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Denn wenn

$$H_k(C) = \mathbb{Z}^{b_k} \oplus \mathrm{Tor}(H_k(C)),$$

so ist wegen

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Tor}(H_k(C)), G) = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^{b_k}, G) = G^{b_k}$$

zunächst

$$\mathrm{Hom}(H_k(C), G) \cong G^{b_k}$$

und andererseits

$$\mathrm{Ext}(H_{k-1}(C), G) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } G = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \\ \mathrm{Tor}(H_{k-1}(C)) & \text{für } G = \mathbb{Z} \end{cases}$$

denn $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n$ (vgl. (2.16) (c)).

- d.h. für $G = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ so hat die Cohomologie i.a. weniger Informationen als die Homologie, da wir die Torsion verlieren. Sie hat nur die Bettizahlen als Dimension des G-VR.

$$b_k := \dim_G H^k(C; G)$$

Insbesondere ist die Eulercharakteristik $\chi(C)$ eines freien Ketten komplexes, dessen Homologie endlich erzeugt ist

$$\chi(C) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^b \dim_G H^k(C; G)$$

- Für $G = \mathbb{Z}$ ist die Cohomologie

  $$H^k(C) \cong \mathbb{Z}^{b_k} \oplus \mathrm{Tor}(H_{k-1}(C))$$

  Die Cobettizahl ist gleich der Bettizahl, denn

  $$\mathrm{rg}(H^k(C)) = \mathrm{rg}(H_k(C))$$

  und die Torsionskoeffizienten sind auch gleich

  $$\mathrm{Tor}(H^k(C)) = \mathrm{Tor}(H_k(C))$$

(2.34) Anwendung: (In der Topologie) Der singuläre Kettenkomplex $C = S(X)$ (bzw $S(X, A)$) eines topologische Raumes (bzw. Raumpaares) ist frei. Also erhalten wir das *universelle Koeffiziententheorem für die Cohomologie von X mit Koeffizienten in G*

$$H^k(X; G) \cong \mathrm{Hom}(H_k(C), G) \oplus \mathrm{Ext}(H_{k-1}(X), G)$$

Analog für (X, A)

(2.35) Axiomatische Cohomologie: Sei G abelsche Gruppe. Kontravariante Funktoren $H^k : \underline{\mathbf{Top}}_2 \to \underline{\mathbf{Ab}}$, $(k \in \mathbb{Z})$, natürliche Transformationen $\delta^k_{(X,A)} : H^k(A; G) \to H^{k+1}(X, A; G)$, so dass gilt:

(1) **Homotopieaxiom:** Sind $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ homotop, $f \simeq g$, so ist

$$f^* = g^* : H^k(Y, B; G) \to H^k(X, A; G)$$

(2) **Exaktheitsaxiom:** Sind $i : A \hookrightarrow X$ und $j : X \hookrightarrow (X, A)$ die Inklusionen, so ist exakt:

$$\ldots \to H^k(X, A; G) \xrightarrow{j^*} H^k(X; G) \xrightarrow{i^*} H^k(A; G) \xrightarrow{\delta^k_{(X,A)}} H^{k-1}(X, A; G) \to \ldots$$

(3) **Ausscheidungsaxiom:** Ist $U \subseteq A \subseteq X$ mit $\overline{U} \subseteq \mathring{A}$ und $i : (X\backslash U, A\backslash U) \hookrightarrow (X, A)$ die Inklusion, so ist

$$i^* : H^k(X, A; G) \to H^k(X\backslash U, A\backslash U; G)$$

ein Isomorphismus.

(4) **Normierungsaxiom:** Für den einpunktigen Raum pt gilt:

$$H^k(\mathrm{pt}; G) = \begin{cases} (0) & \text{für } k \neq 0 \\ G & \text{für } k = 0 \end{cases}$$

Außerdem gibt es (eigentlich folgt das aus (a)-(b)) eine natürliche lange exakte *Mayer-Vietoris-Sequenz* für ein Ausschneidungspaar (X_1, X_2) von X.

3 Das cup-Produkt

Im Folgenden sei R ein kommutativer Ring mit 1.

(3.1) Definition: Seien X und Y topologische Räume, $p, q \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren dann den Produkt-Homomorphismus

$$\cdot : \operatorname{Hom}(S_p(X), R) \otimes_R \operatorname{Hom}(S_q(Y), R) \to \operatorname{Hom}(S_p(X) \otimes S_q(Y), R)$$

durch

$$\varphi \otimes \psi \mapsto \varphi \cdot \psi$$

mit

$$\langle \varphi \cdot \psi, c \otimes d \rangle := \langle \varphi, c \rangle \cdot \langle \psi, d \rangle \qquad (*)$$

(3.2) Kommentar: (a) Erinnere, dass für $\varphi \in \operatorname{Hom}(S_p(X), R)$ und $c \in S_p(X)$ die Paarung

$$\langle \_, \_ \rangle : \operatorname{Hom}(S_p(X); R) \times S_p(X) \to R$$

durch

$$\langle \varphi, c \rangle = \varphi(c)$$

gegeben war. Für $c \in S_q(X)$ mit $q \neq p$ setzen wir $\langle \varphi, c \rangle = 0$.

(b) Der Produkt-Homomorphismus ist R-linear. (Der induzierte Homomorphismus $S_p(X) \to \operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}(S_p(X), R))$ ist i.a. weder injektiv noch surjektiv.) Man beachte, dass auf der rechten Seite von (*) die Multiplikation in R gemeint ist. Deshalb muss R jetzt ein (kommutativer) Ring sein.

(3.3) Lemma: Sei φ eine p-Cokette in X und ψ eine q-Cokette in y (Mit Werten in R). Dann gilt:

$$\delta(\varphi \cdot \psi) = \delta\varphi \cdot \psi + (-1)^p \varphi \cdot \delta\psi$$

Beweis. Sei $c \in S_i(X), d \in S_j(X)$ mit $i + j = p + q + 1$. Dann ist nach Definition des Corandoperator und des Randoperators auf dem Produktkomplex $S(X) \otimes S(Y)$:

$$\begin{aligned}
\langle \delta(\varphi \cdot \psi), c \otimes d \rangle &= \langle \varphi \cdot \psi, \partial(c \otimes d) \rangle \\
&= \langle \varphi \cdot \psi, \partial c \otimes d + (-1)^i c \otimes \partial d \rangle \\
&= \langle \varphi, \partial c \rangle \cdot \langle \psi, d \rangle + (-1)^i \langle \varphi, c \rangle \cdot \langle \psi, \partial d \rangle \\
&= \langle \delta\varphi, c \rangle \cdot \langle \psi, d \rangle + (-1)^i \langle \varphi, c \rangle \cdot \langle \delta\psi, d \rangle \\
&= \langle \delta\varphi \cdot \psi, c \otimes d \rangle + (-1)^p \langle \varphi, c \rangle \cdot \langle \delta\psi, d \rangle \qquad (*)
\end{aligned}$$

Im Fall $i = p$ und $= \langle \delta\varphi \cdot \psi, c \otimes d \rangle + 0$ im Fall $i \neq p$. Damit aber gilt (*) auch.
Daraus folgt

$$\langle \delta(\varphi \cdot \psi), c \otimes d \rangle = \langle \delta\varphi \cdot \psi + (-1)^p \varphi \cdot \delta\psi, c \otimes d \rangle$$

also

$$\delta(\varphi \cdot \psi) = \delta\varphi \cdot \psi + (-1)^p \varphi \cdot \delta\psi,$$

da $\big(S(X) \otimes S(Y)\big)_{p+q+1}$ von Elementen der Form $c \otimes d$ mit $c \in S_i(X), d \in_j S(X)$ und $i + j = p + q + 1$ erzeugt wird. $\square$

(3.4) Kommentar: Deshalb drückt sich das Produkt aus (3.1) nun auf die zugehörigen Cohomologiegruppen durch, d.h.

$$\begin{aligned} H^p(X;R) \otimes H^q(Y;R) &\to H^{p+q}(S(X) \otimes S(Y);R) \\ [\varphi] \otimes [\psi] &\mapsto [\varphi \cdot \psi] \end{aligned}$$

ist wohldefiniert und R-linear. Ist nämlich $\varphi \in Z^p(X;R) = \ker(\delta^p)$ und $\psi \in Z^q(Y;R)$, so ist $\varphi \cdot \psi$ ein Cozykel in $\mathrm{Hom}(S(X) \otimes S(Y);R)$, weil

$$\delta(\varphi \cdot \psi) = \underbrace{\delta\varphi}_{=0} \cdot \psi + (-1)^p \varphi \cdot \underbrace{\delta\psi}_{=0} = 0$$

Ist $\varphi \in Z^p(X;R)$ und $\psi \in B^q(Y;R) \subseteq \mathrm{im}(\delta^{q-1})$, so ist auch $\varphi \cdot \psi$ ein Corand im Cokettenkomplex $\mathrm{Hom}(S(X) \otimes S(Y);R)$, denn ist $\psi = \delta\chi$, so ist

$$\delta((-1)^p \varphi\chi) = (-1)^p \underbrace{\delta\varphi}_{=0} \cdot \psi + \underbrace{(-1)^{2p}}_{=1} \varphi\delta\chi = \varphi \cdot \psi$$

Ebenso ist für einen Corand φ und einen Cozykel ψ die Cokette $\varphi \cdot \psi$ wieder ein Corand. Deshalb ist (*) wohldefiniert und R-linear nach dem Homomorphiesatz:

$$\begin{tikzcd} Z^p(X;R) \otimes_R Z^q(Y;R) \arrow[r] \arrow[d, "\pi \times \pi"'] & Z^{p+q}(S(X) \otimes S(Y);R) \arrow[d, "\pi"] \\ H^p(X;R) \otimes_R H^q(Y;R) \arrow[r, "(*)"] & H^{p+q}(S(X) \otimes S(Y);R) \\ \alpha \otimes \beta \arrow[r, mapsto] & \alpha \cdot \beta \end{tikzcd}$$

(3.5) Definition: Sei nun $Q = \big(Q_{XY} : S(X \times Y) \to S(X) \otimes S(Y)\big)_{X,Y}$ eine EZ-Trafo. Für topologische Räume X, Y sowie $p, q \in \mathbb{N}_0$ definieren wir das *Cohomologie-Kreuzprodukt* auf X und Y durch

$$\begin{aligned} \times : H^p(X;R) \times H^q(Y;R) &\to H^{p+q}(X \times Y;R) \\ [\varphi] \times [\psi] &:= [(\varphi \cdot \psi) \circ Q] \\ &= Q^*([\varphi \cdot \psi]) \end{aligned} \tag{*}$$

(3.6) Kommentar: (a) Erinnere, dass für eine EZ-Trafo Q der induzierte Homomorphismus $Q_* : H_k(X \times Y) - H_k(S(X) \otimes S(Y))$ unabhängig von der Wahl von Q war und damit auch

$$Q^* : H^k(X \times Y;R) \to H^k(S(X) \otimes S(Y);R)$$

Vorsicht: Q^* ist i.a. nicht das Dual von Q_*.
Für $\alpha = [\varphi]$ und $\beta = [\psi]$ schreibt sich nun (*) wie folgt:

$$\alpha \times \beta = Q^*(\alpha \cdot \beta)$$

was zeigt, dass $\alpha \times \beta$ wohldefiniert (und auch funktoriell) ist.

(b) Wie beim Homologie-Kreuzprodukt zeigt man nun die folgenden Eigenschaften von $\times$:

(3.7) Satz: $\times$ hat die folgenden Eigenschaften:

(1) $\times$ ist R-bilinear:

$$(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2) \times \beta = r_1(\alpha_1 \times \beta) + r_2(\alpha_2 \times \beta)$$
$$\alpha \times (r_1\beta_1 + r_2\beta_2) = r_1(\alpha \times \beta_1) + r_2(\alpha \times \beta_2)$$

(2) $\times$ ist funktionell: Sind $f : X \to X'$ und $g : Y \to Y'$ stetig, so ist

$$(f \times g)^*(\alpha \times \beta) = f^*\alpha \times g^*\beta,$$

für alle $\alpha \in H^p(X;R), \beta \in H^q(Y;R), p, q \in \mathbb{N}_0$;

(3) $\times$ ist assoziativ: Für $\alpha \in H^p(X;R), \beta \in H^q(Y;R)$ und $\gamma \in H^r(Z;R)$ ist

$$(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma) \in H^{p+q+r}(X \times Y \times Z;R).$$

(4) $\times$ ist im Folgenden Sinne (graduiert) kommutativ: Ist $t : X \times Y \to Y \times X$ die Vetauschung $(y, y) \mapsto (y, x)$, so ist für $\alpha \in H^p(X;R), \beta \in H^q(Y;R)$:

$$\alpha \times \beta = (-1)^{pq} t^*(\beta \times \alpha)$$

(3.8) Vorbereitung: (a) Sei für einen topologischen Raum X

$$\mathbb{1}_X : X \to R$$

die 0-Cokette, die auf der Basis $\sum_0(X) = X$ durch

$$\mathbb{1}_X(x) = 1_R$$

gegeben ist. (Beachte, dass R ein Ring mit Eins ist.) Dann ist $\mathbb{1}_X$ ein Cozyklus, denn ist $\sigma \in \sum_1(X), \sigma : \Delta^1 \to X$, so ist

$$\begin{aligned}\langle \delta\mathbb{1}_X, \sigma\rangle = \langle \mathbb{1}_X, \partial\sigma\rangle &= \langle \mathbb{1}_X, \sigma(e_1) - \sigma(e_0)\rangle \\ &= \langle \mathbb{1}_X, \sigma(e_1)\rangle - \langle \mathbb{1}_X, \sigma(e_0)\rangle \\ &= 1 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Und damit $\mathbb{1}_X = 0$. Wie notieren die zugehörte Cohomologieklasse mit

$$1_X := [\mathbb{1}_X].$$

(b) Sind nun $\pi_1 : X \times Y \to X$ und $\pi_2 : X \times Y \to Y$ die natürlichen Projektionen, so hat das C-Keuzpodukt auch neutrale Elemente im folgenden Sinn:

(5)

$$\alpha \times 1_Y = \pi_1^*(\alpha), \quad 1_X \times \beta = \pi_2^*(\beta),$$

für $\alpha \in H^p(X;R), \beta \in H^q(Y;R)$.

(3.9) Vorbereitung: (a) Wir verallgemeinern Zunächst die natürliche Paarung aus (2.22) zu

$$\langle \_, \_\rangle : \mathrm{Hom}(S_p(X), R) \times (S_p(X) \otimes R) \to R$$

durch

$$\langle \varphi, \sum r_i c_i\rangle := \sum r_i \langle \varphi, c_i\rangle$$

und beobachten, dass $\langle \_, \_\rangle$ damit R-linear wird und nach wie vor die Corand-Rand-Formel (mit dem Randoperator $\partial \circ \mathrm{id}$ auf $S(X) \otimes R$ gilt:

$$\langle \delta\varphi, \overline{c}\rangle = \langle \varphi, \partial \otimes \mathrm{id}(\overline{c})\rangle$$

wo nur $\overline{c} = \sum_i r_i c_i$ eine Kette im Kettenkomplex $S(X) \otimes R$ ist.

(b) Deshalb drückt sich wie bei (2.25) $\langle \_, \_ \rangle$, nun auch zu eine Paarung

$$\langle \_, \_ \rangle : H^p(X;R) \otimes_R H_p(X;R) \to R$$

durch. Mit dieser können nun Cohomologie- und Homologie-Kreuzprodukt in Zusammenhang gebracht werden:

(3.10) Satz: Für zwei topologische Raume X und Y, $p, q, r, s \in \mathbb{N}_0$ sowie $\alpha \in H^p(X;R), \beta \in H^q(Y;R), \alpha' \in H_p(X;R), \beta' \in H_q(Y;R)$ gilt:

$$\langle \alpha \times \beta, \alpha' \times \beta' \rangle = \langle \alpha, \alpha' \rangle \cdot \langle \beta, \beta' \rangle$$

(für $r = s$ und $s = q$ und Null sonst).

Beweis. Seien $P = \big(P_{XY} : S(x) \otimes S(Y) \to S(X \times Y)\big)_{X,Y}$ und $Q = \big(Q_{XY} : S(X \times Y) \to S(x) \otimes S(Y)\big)_{X,Y}$ EZ-Trafos. Mit $P \circ Q \simeq \mathrm{id}_{S(X \times Y)}, Q \circ P \simeq \mathrm{id}_{S(X) \otimes S(Y)}$ ist auch

$$\begin{aligned} P^R_{XY} : \big(S(X) \otimes R\big) \otimes_R \big(S(Y) \otimes R\big) &\to S(X \times Y) \otimes R \\ (rc) \otimes (r'c') &\mapsto rr' \cdot P_{XY}(c \otimes c') \end{aligned}$$

Homotopieinvers zu Q^R_{XY} und damit auf Homologieniveau $P_* = \big((P^R_{XY})_*\big)_{X,Y}$ invers zu $Q_* = \big((Q^R_{XY})_*\big)_{X,Y}$ ist, insbesondere

$$Q_* \circ P_* = \mathrm{id}$$

(vgl. (1.32). Damit, und der Definition der Kreuzprodukte, rechne nun:

$$\begin{aligned} \langle \alpha \times \beta, \alpha' \times \beta' \rangle &= \langle Q^*(\alpha \cdot \beta), P_*(\alpha' \otimes \beta') \rangle \\ &= \langle \alpha \cdot \beta, Q_* P_*(\alpha' \otimes \beta') \rangle \\ &= \langle \alpha, \alpha' \rangle \cdot \langle \beta, \beta' \rangle \end{aligned}$$

□

(3.11) Satz: (Künneth-Formel für Cohomologie) Seien X, Y topologische Räume, $k \in \mathbb{N}$ und es gelte (a) oder (b):

(a) $H^p(X)$ und $H^q(Y)$ sind frei von endlichem Rang für alle $0 \leqslant p, q \leqslant k$;

(b) R ist ein Körper und $H^p(X;R)$, $H^q(Y;R)$ sind endlich-dimensional für $0 \leqslant p, q \leqslant k$.

Für $R = \mathbb{Z}$ bzw. R ein Körper liefert dann das Cohomologie-Kreuzprodukt einen Isomorphismus ($\otimes := \otimes_R$):

$$\begin{aligned} \Lambda : \bigoplus_{p+q=k} H^p(X;R) \otimes H^q(Y;R) &\to H^k(X \times Y;R) \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto \alpha \times \beta. \end{aligned}$$

Beweis. ??? □

(3.12) Definition: Sei X ein topologischer Raum, R kommutativer Ring mit Eins und $d : X \to X \times X$ die Diagonalabbildung, $x \mapsto (x, x)$. Für zwei Cohomologieklassen $\alpha \in H^p(X;R)$ und $\beta \in H^q(X;R)$ ($p, q \in \mathbb{N}_0$) definiert man deren *cup-Produkt* (Mit Koeffizienten in R)

$$\alpha \cup \beta := d^*(\alpha \times \beta) \in H^{p+q}(X;R)$$

(3.13) Satz: Das cup-Produkt

$$\cup : H^p(X;R) \times H^q(X;R) \to H^{p+q}(X;R)$$

ist

(i) bilinear,

$$(r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2) \cup \beta = r_1\alpha_1 \cup \beta + r_2\alpha_2 \cup \beta$$
$$\alpha \cup (r_1\beta_1 + r_2\beta_2) = r_1\alpha \cup \beta_1 + r_2\alpha \cup \beta_2$$

für alle $r_1, r_2 \in R, \alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in H^p(X;R), \beta, \beta_1, \beta_2 \in H^q(X;R)$;

(ii) natürlich, d.h. für ein stetige $f : X \to Y$ ist

$$f^*(\alpha \cup \beta) = f^*\alpha \cup f^*\beta$$

für $\alpha \in H^p(X;R), \beta \in H^q(X;R)$;

(iii) assoziativ, also

$$(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma)$$

für $\alpha \in H^p(X;R), \beta \in H^q(X;R)$ und $\gamma \in H^r(X;R)$;

(iv) das Element $1_X \in H^0(X;R)$ ist neutral,

$$1_X \cup \alpha = \alpha = \alpha \cup 1_X$$

für alle $\alpha \in H^p(X;R)$ und $p \in \mathbb{N}_0$;

(v) kommutativ in folgendem Sinn:

$$\beta \cup \alpha = (-1)^{pq}\alpha \cup \beta,$$

für $\alpha \in H^p(X;R), \beta \in H^q(X;R)$.

Beweis. ??? □

(3.14) Kommentar: (a) Führt man für X und R den R-Modul $H^*(X : R)$ als direkte Summe

$$H^*(X;R) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} H^k(X;R)$$

ein, so wird $H^*(X;R)$ mit dem Cup-Produkt (genauer dessen bilineare Fortsetzung) zu einer *kommutativen graduierte R-Algebra mit 1.* Mit (3.11) (b) wird auch für ein stetiges $f : X \to Y$ das induzierte

$$f^* : H^*(Y;R) \to H^*(X;R)$$

zu einem R-Algebra-Homomorphismus und mit der Kategorie $\underline{\mathbf{Alg}}_R$ der kommutativen graduierten R-Algebren mit 1

$$H^*(\_;R) : \underline{\mathbf{Top}} \to \underline{\mathbf{Alg}}_r$$

zu einem kontravarianten Funktor.

(b) Auf dem graduierem R-Modul der Homologie

$$H_*(X;R) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} H_k(X;R)$$

gibt es eine solche Produktstruktur i.a. nicht.