Probeklausur Analysis I/Mathematik f. Physiker I

Peter Pickl
Fachbereich Mathematik, Universität Tübingen

19. Januar 2024

- Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie abgeben, oben rechts Ihren Namen. Beginnen Sie mit einer neuen Aufgabe immer ein neues Blatt. Kein Blatt soll Lösungvorschläge mehrerer Aufgaben beinhalten, das Verwenden mehrerer Blätter für eine Aufgabe ist natürlich zulässig.
- Erlaubte Hilfsmittel sind Schreibzeug und ein DIN A4 Blatt, das beidseitig handschriftlich beschrieben sein darf (legaler "Spickzettel"). Papier für die Lösungen wird gestellt. Ein nicht programmierbarer Taschenrechner ist zulässig.
- Sollten Sie Kommunikationsgeräte bei sich führen (Handy, Laptop, etc.) sind diese verschlossen aufzubewahren, z.B. in einem Rucksack mit geschlos-senem Reißverschluss. Gleiches gilt für jegliches Material, das mit dem Kurs zu tun hat (Bücher, Skripte etc.).
- Jede Aufgabe gibt die gleiche Punktzahl.
- Bei Bedarf kann zusätzliches Papier angefordert werden.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.

Name, Vorname:..

Matrikelnummer:...

Studienfach:...

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1: Überprüfen Sie, ob folgende Aussagen Tautologien, Kontradiktionen oder weder das eine, noch das andere sind:

a) $(A \Leftarrow \neg B) \Leftrightarrow (A \wedge B)$ b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \vee \neg B)$

Lösung: a) $A = w, B = w \Rightarrow (A \Leftarrow \neg B)$ ist wahr. Auch $(A \wedge B)$ ist wahr. Somit ist Aussage (a) wahr.

Wenn A wahr und B falsch ist, so ist $(A \Leftarrow \neg B)$ wahr, aber $(A \wedge B)$ ist falsch. Somit ist Aussage (a) falsch. Somit ist (a) weder eine Tautologie, noch eine Kontradiktion

(b) Falls A und B wahr sind, so ist $(A \Rightarrow B)$ wahr. Auch $(A \vee \neg B)$ ist wahr, die Aussage (b) ist also wahr.

Falls A falsch und B wahr ist, so ist $(A \Rightarrow B)$ wahr. Aber $(A \vee \neg B)$ ist falsch, die Aussage (b) ist also falsch.

Somit ist (b) weder eine Tautologie, noch eine Kontradiktion.

Aufgabe 2: Es seien die Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gegeben. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Falls g injektiv sind, so gilt: f injektiv $\Leftrightarrow g \circ f$ injektiv.

b) Falls f injektiv sind, so gilt: g injektiv $\Leftrightarrow g \circ f$ injektiv.

Lösung:

a) „ $\Rightarrow''$ Seien g, f injektiv $\to g(f(x)) = g(f(y))$ impliziert $f(x) = f(y)$ da g injektiv. Das widerum impliziert, dass $x = y$, da f injektiv. Daher gilt: $g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow x = y$ was zu beweisen war.

   „ $\Leftarrow''$ Es gelte $g \circ f$ injektiv. WE: f ist nicht injektiv. Dann gibt es ein $x \neq y$ mit $f(x) = f(y)$. Dann ist aber auch $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ obwohl $x \neq y$. Dies widerspicht der Injektivität von $g \circ f$.

b) Falls f injektiv sind, so gilt: g injektiv $\Leftrightarrow g \circ f$ injektiv.

   Diese Aussage gilt nicht. Gegenbeispiel: $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ und $g : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3\}$. $f(x) = x$ für alle x; $g(x) = x$ für $x \in \{1, 2, 3\}$ sowie $g(4) = 4$. f ist injektiv, ebenso die Verknüpfung $g \circ f$. Jedoch ist g nicht injektiv.

Aufgabe 3: Sei $T \subset \mathbb{R}$ offen. Zeigen Sie: $x \in T^c$ ist genau dann Randpunkt von T falls es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ gibt mit $\lim_{n \to \infty} a_n = x$ (T^c bezeichnet hier das Komplement von T).

Lösung: „ $\Leftarrow''$ Sei $x \in T^c$ ein Randpunkt von T und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ mit $\lim_{n \to \infty} a_n = x$. WA: x ist innerer Punkt von T^c. Dann gibt es eine Umgebung mit Radius $\varepsilon > 0$ um x, die komplett in T^c liegt. Daher gilt für alle $y \in T$: $|x - y| > \varepsilon$. Dies ist ein Widerspruch zu $\lim_{n \to \infty} a_n = x$, denn es gibt unendlich viele Folgenglieder mit $|x - a_n| < \varepsilon$ und die a_n liegeb ja alle in T. Daduch ist x kein innerer Punkt von T^c und, da $x \notin T$ auch kein innerer Punkt von T, somit ist es Randpunkt.

„ $\Rightarrow''$ Sei x Randpunkt von T. Dann ist x kein innerer Punkt von T^c. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt also, dass der Ball um x mit Radius ε nicht komplett in T^c liegt. Also: $\forall \varepsilon > 0 \exists y_\varepsilon \in T$ mit $|x - y_\varepsilon| < \varepsilon$. Wir setzen $a_n = y_{1/n}$ und erhalten so eine Folge in T mit $\lim_{n \to \infty} a_n = x$.

Aufgabe 4: Sei $a > 0$. Bestimmen Sie jeweils nach einer geeigneten Wahl der Wertemenge die Ableitung von $f(x) = \log_a x$ und $g(x) = \operatorname{arccot}(x)$.

Lösung: $f(x) = \log_a x$ ist die Umkehrfunktion zu $f^{-1}(x) = a^x = e^{x \ln a}$. Die Ableitung der letzteren ist gegeben durch $\ln a e^{x \ln a} = \ln a f^{-1}(x)$. Die Definitionsmenge von f^{-1} ist ganz $\mathbb{R}$, hier ist außerdem f^{-1} streng monoton, dadurch invertierbar, die Ableitung ist nirgends Null. Daher erhalten wir $f' = \frac{1}{\ln ax}$

Es it $g^{-1} = cotx = \frac{\cos x}{\sin x}$. diese Funktion ist auf $]0, \pi[$ streng monoton fallend und hat keine Nullstelle in der Ableitung. Es it $(g^{-1})' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin x \sin x} = -1 - (cot(x))^2$.

Es folgt $g' = -\frac{1}{1+x^2}$

Aufgabe 5: Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_a(x) = \frac{1}{2} \sin x + a$. Zeigen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktion f_a genau einmal die Winkelhalbierende des ersten und dritten Quadranten (d.h. die Gerade $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g(x) = x$) schneidet.

Lösung: Es gilt zu zeigen, dass $g_a := \frac{1}{2} \sin x + a - x$ genau eine Nullstelle hat (Schnittpunkte sind immer Nullstellen der Differenzfunktion). WA: Es gibt eine zweite Nullstelle. Dann sagt der Satz von Rolle, dass es ein x mit $g_a'(x) = 0$ gibt. Es ist aber $g_a'(x) = \frac{1}{2} \cos x - 1 \leq -1/2$, hat also keine Nullstelle.