MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN WiSe 2023/24

Analysis I / Mathematik für Physiker I

Prof. Dr. P. Pickl, Umut Özcan

Blatt 8

Aufgabe 1: (2 Punkte) Zeigen Sie: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergiert genau dann (im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne), wenn der $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 2: (2 Punkte) Zeigen Sie: Die Menge der Häufungspunkte einer beliebigen Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist immer abgeschlossen.

Hinweis: Sei H die Menge der Häufungspunkte der Folge. Zeigen Sie, dass für eine in $\mathbb{R}$ Konvergente Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ auch $\lim_{n\to\infty} h_n \in H$ gilt.

Aufgabe 3: (2 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz

a) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j}{j^j}$

b) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ Hinweis: Für welche Folge erhält man die Reihe $r_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = \frac{1}{n}$?

c) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2 2^j}{3^j}$

d) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j!}{j^j}$

Aufgabe 4: (2 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine monotone (d.h. monoton fallende oder monoton steigende) Folge. Zeigen Sie, dass die (eigentliche) Konvergenz der entsprechenden Reihe $r_n := \sum_{j=1}^{n} a_j$ impliziert, dass $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

Bitte geben Sie das Übungsblatt jeweils zu zweit oder zu dritt bei Ihrem Übungsleiter bis spätestens 13.12.2023 um 10:15 ab. Denken Sie daran, von allen zwei bzw. drei Personen die Namen auf dem Blatt anzugeben. Eine elektronische Abgabe per Upload über URM wird bevorzugt.