Analysis I / Mathematik für Physiker I

Prof. Dr. P. Pickl, Umut Özcan

Blatt 7

Aufgabe 1: (2 Punkte) Sei $T \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Ein $x \in \mathbb{R}$ ist genau dann Randpunkt von T falls eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ und eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T^c$ existiert, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x$.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes von oben beschränkte $T \subset \mathbb{R}$ der Wert $\sup T$ ein Randpunkt ist.

Aufgabe 2: (2 Punkte) Beweisen Sie folgende Eigenschaften des Supremums:

(a)

$$\sup A + \sup B = \sup(A + B)$$

(b)

$$\sup A \cap B \leq \min\{\sup A, \sup B\}$$

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ gegeben durch

$$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \qquad \text{und} \qquad b_n = 2^n + (-2)^n \, .$$

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte dieser beiden Folgen.

Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Werte: $A_n := \sup_{k\geq n} a_k$ sowie $B_n := \sup_{k\geq n} b_k$. Bestimmen Sie sodann die Limiten $\lim_{n\to\infty} A_n$ und $\lim_{n\to\infty} B_n$.

Aufgabe 4: (2 Punkte) Es sei K ein angeordneter Körper. Zeigen Sie: Falls jede Teilmenge von K ein Supremum besitzt, so ist K vollständig und archimedisch.

Bitte geben Sie das Übungsblatt jeweils zu zweit oder zu dritt bei Ihrem Übungsleiter bis spätestens 06.12.2023 um 10:15 ab. Denken Sie daran, von allen zwei bzw. drei Personen die Namen auf dem Blatt anzugeben. Eine elektronische Abgabe per Upload über URM wird bevorzugt.