Analysis I / Mathematik für Physiker I

Prof. Dr. P. Pickl, Umut Özcan

Blatt 5

Aufgabe 1: (2 Punkte) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \{\pm\infty\}$. Zeigen Sie, dass auch die Summe $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und für $a \neq 0$ das Produkt $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im uneigentlichen Sinne konvergieren.

Welche der beiden Aussagen gilt im allgemeinen auch für den Fall $\lim_{n\to\infty} a_n \in \{\pm\infty\}$ (ohne Beweis)?

Aufgabe 2: (2 Punkte) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sei rekursiv definiert durch $a_1 = 5$ und

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n} + \frac{a_n}{2}\ .$$

Zeigen Sie

(a) $a_n \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (z.B. mittels Induktion)

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist monoton fallend.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist konvergent.

Wie lautet der Limes $\lim_{n\to\infty} a_n$?

Aufgabe 3: (2 Punkte) Es sei

$$K := \left\{ f : z \to \frac{Z(z)}{N(z)} \mid Z \text{ und } N \text{ sind Polynome ohne gemeinsame Nullstelle} \right\}\ .$$

Der Definitionsbereich der Elemente von K ist jeweils der maximale Definitionsbereich in $\mathbb{R}$.

Auf K lassen sich Addition und Multiplikation definieren indem man regulär die Funktionen addiert bzw. multipliziert und anschließend vollständig kürzt um dafür zu sorgen, dass Z und N keine gemeinsamen Nullstellen haben. Dadurch wird K zum Körper. Was sind die neutralen Elemente des Körpers? Wie lauten die inversen Elemente? Die weiteren Axiome folgen direkt aus den Eigenschaften von Addition und Multiplikation und müssen nicht gezeigt werden.

Zeigen Sie, dass durch $f(z) = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots b_0} \in K^+ \Leftrightarrow \frac{a_m}{b_n} > 0$ auf K eine Anordnung definiert ist. Zeigen Sie, dass das archimedische Axiom auf K nicht gilt.

Aufgabe 4: (2 Punkte) Zeigen Sie: Eine streng monoton steigende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ hat niemals ein Maximum, d.h. es gibt kein $C \in \mathbb{R}$ mit $C \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ so dass ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_m = C$.

Wie sieht es bei einer streng monoton steigende Folge mit dem Minimum aus? Wie ist die Situation bei streng monoton fallenden Folgen?

Bitte geben Sie das Übungsblatt jeweils zu zweit oder zu dritt bei Ihrem Übungsleiter bis spätestens 22.11.2023 um 10:15 ab. Denken Sie daran, von allen zwei bzw. drei Personen die Namen auf dem Blatt anzugeben. Eine elektronische Abgabe per Upload über URM wird bevorzugt.