Analysis I / Mathematik für Physiker I

Prof. Dr. P. Pickl, Umut Özcan

Blatt 3

:

Aufgabe 1: (2 Punkte) Gegeben Sei die Menge $K = \{0, 1, A, B\}$ und die Verknüpfungen $\oplus, \odot : K \to K$ gegeben durch die folgenden Verknüpfungstabellen

$\oplus$	0	1	A	B
0	0	1	A	B
1	1	0	B	A
A	A	B	0	1
B	B	A	1	0

$\odot$	0	1	A	B
0	0	0	0	0
1	0	1	A	B
A	0	A	B	1
B	0	B	1	A

Zeigen Sie, dass $(K, \oplus, \odot)$ ein Körper ist.

Aufgabe 2: (2 Punkte)

Gegeben Sei die Menge der 2×2-Matrizen, d.h.

$$M(2 \times 2, \mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} .$$

Auf $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ sind durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

zwei Verknüpfungen definiert. Geben Sie für beide Verknüpfungen das neutrale Element an. Wie sehen die Inversen der Addition aus. Zeigen Sie, dass nicht alle Elemente in $M(2 \times 2, \mathbb{R}) \backslash \{0\}$ bezüglich Multiplikation invertierbar sind (0 bezeichnet wie immer das neutrale Element der Addition). Zeigen Sie, dass $X \cdot Y = 0$ nicht notwendiger Weise $X = 0$ oder $Y = 0$ ergibt.

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Zeigen Sie: In einem angeordneten Körper gibt es außer 0 keine zyklischen Elemente bezüglich der Addition, dass heisst kein $a \neq 0$ so dass es eine natürlich Zahl n gibt mit $n \star a = 0$. $n \star a$ ist hier iterativ definiert über $1 \star a = a$ und $(n+1) \star a = a + n \star a$.

Bemerkung: In einer alten Version des Blattes war die Aufgabenstellung fehlerhaft. Falls Sie zeigen, dass der Körper bezüglich der Multiplikation keine zyklischen Elemente ausser 1 und -1 enthält, wird dies ebenfalls als Lösung anerkannt.

Aufgabe 4: (2 Punkte) Sei K ein angeordneter Körper. Zeigen Sie:

(a) a^2 ist postiv für alle $a \in K \backslash \{0\}$.

(b) Für zwei beliebige positive Zahlen a, b ist die folgende Ungleichung immer erfüllt:

$$ab^{-1} + a^{-1}b \geq 1 + 1 \ .$$

Bitte geben Sie das Übungsblatt jeweils zu zweit oder zu dritt bei Ihrem Übungsleiter bis spätestens 08.11.2023 um 10:15 ab. Denken Sie daran, von allen zwei bzw. drei Personen die Namen auf dem Blatt anzugeben. Eine elektronische Abgabe per Upload über URM wird bevorzugt.