Analysis I / Mathematik für Physiker I

Prof. Dr. P. Pickl, Umut Özcan

Blatt 13

Aufgabe 1: (1+1/2+1/2 Punkte) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

(a) Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$, dann ist f streng monoton steigend.

(b) Falls f monoton steigend ist, so ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[$.

(c) Zeigen Sie, dass die Umkehrung von (a) nicht gilt, d,h, widerlegen Sie die folgende Aussage: f ist streng monoton steigend, auf $[a, b]$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar $\Rightarrow f'(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$.

Aufgabe 2: (2 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 + e^x$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass f genau eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 3: (4x1/2 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Limiten

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

(b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{2x}}{x^2 e^x}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{c}{x}\right)^x$ für $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4: (2 Punkte) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[0, 1]$ nach Einteilung von $[0, 1]$ in n gleich große Teilintervalle ($n \in \mathbb{N}$) die Ober- und Untersummen, sowie deren Differenzen.

Beweisen Sie dann die Integrierbarkeit von f auf $[0, 1]$ und bestimmen Sie den Wert des Integrales $\int_0^1 x^2 dx$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst mittels Induktion, dass $\sum_{j=1}^n j^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$.

Bitte geben Sie das Übungsblatt jeweils zu zweit oder zu dritt bei Ihrem Übungsleiter bis spätestens 31.01.2024 um 10:15 ab. Denken Sie daran, von allen zwei bzw. drei Personen die Namen auf dem Blatt anzugeben. Eine elektronische Abgabe per Upload über URM wird bevorzugt.