

Analysis I / Mathematik für Physiker I

Prof. Dr. P. Pickl, Umut Özcan

Blatt 11

Aufgabe 1: (2 Punkte)

Die Umkehrung des Zwischenwertsatzes gilt nicht, wie man am folgenden Beispiel sehen kann: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(0) = 0$ sowie $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$.

Zeigen Sie, dass f in der Tat nicht stetig ist, aber folgende Eigenschaft erfüllt: Für jedes $a < b$ und jedes y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = y$.

Aufgabe 2: ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$ Punkte) Überprüfen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit. Beweisen Sie ihre Aussagen.

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sin x$.

(b) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$

Aufgabe 3: (2 Punkte) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge gleichmäßig stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergieren. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 4: (1+1 Punkte)

(a) Zeigen Sie:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existiert} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{für } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

stetig fortsetzbar ist. Ist die stetige Fortsetzung von f an der Stelle 0 differenzierbar?

Bitte geben Sie das Übungsblatt jeweils zu zweit oder zu dritt bei Ihrem Übungsleiter bis spätestens 17.01.2024 um 10:15 ab. Denken Sie daran, von allen zwei bzw. drei Personen die Namen auf dem Blatt anzugeben. Eine elektronische Abgabe per Upload über URM wird bevorzugt.