MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN

WiSe 2023/24

Analysis I / Mathematik für Physiker I

Prof. Dr. P. Pickl, Umut Özcan

Blatt 10

Aufgabe 1: (2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $x^3 = 4\sqrt{3} + 4i$ und skizzieren Sie diese in der komplexen Zahlenebene.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $2^x = 4 - 4i$ und skizzieren Sie diese in der komplexen Zahlenebene.

(c) Welche Mächtigkeit hat die Lösungsmenge der Gleichung $x^\pi = 1$?

Aufgabe 2: (2 Punkte) Beweisen sie, dass die Sinus- und Cosinusfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind.

Hinweis: Weisen Sie die Stetigkeit jeweils erst an der Stelle 0 nach und verallgemeinern sie dann mit Hilfe der Additionstheoreme.

Aufgabe 3: (2 Punkte) Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Menge mit endlich vielen Elementen. Zeigen Sie: jede Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist überall stetig.

Aufgabe 4: (2 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch: $f(x) = 0$ falls x irrational. Für rationale x schreibe x als vollständig gekürzten Bruch $x = \frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f(x)$ definiert als $f(x) = f(\frac{z}{n}) = \frac{1}{n}$.

Zeigen Sie: Falls a rational ist, ist f an der Stelle a unstetig, falls a irrational ist, ist f an der Stelle a stetig.

Bitte geben Sie das Übungsblatt jeweils zu zweit oder zu dritt bei Ihrem Übungsleiter bis spätestens 10.01.2024 um 10:15 ab. Denken Sie daran, von allen zwei bzw. drei Personen die Namen auf dem Blatt anzugeben. Eine elektronische Abgabe per Upload über URM wird bevorzugt.