χ^2-Verteilung

Annahme: $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und standardnormalverteilt.

Frage: Wie sieht die Verteilungsfunktion von
$Z = \sum_{j=1}^{n} X_j^2$ aus?

Definition: Die Verteilungsfunktion von Z nennt man chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden.
$\chi^2(n)$.

Berechnung der WDichte von Z:

$$f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{e^{-\frac{1}{2}x_j^2}}{\sqrt{2\pi}} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$$

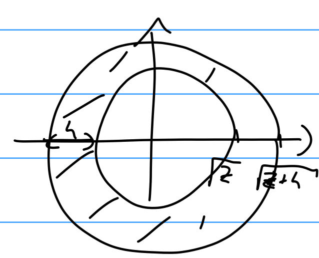
$$\rho_n(z) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(z < Z \le z+h) =$$

$$\mathbb{P}(Z \le z+h) - \mathbb{P}(Z \le z)$$

$$V(z+h) - V(z)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_M (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \, dx_1 \dots dx_n = (*)$$

mit $M = \{ z \le \underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}_{\sim z} \le z+h \}$



$$(*) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}z} \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_M dx_1 \dots dx_n}_{\frac{d}{dz} V_n(\sqrt{z})}$$

$$V_n(R) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \qquad \frac{d}{dz} V_n(\sqrt{z}) = \frac{d}{dz}\left(\frac{\pi^{\frac{n}{2}} z^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \right) = \frac{z^{\frac{n}{2}-1} \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$\rho_n(z) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} z^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} \qquad z > 0 \qquad \text{sonst ist } \rho = 0.$$