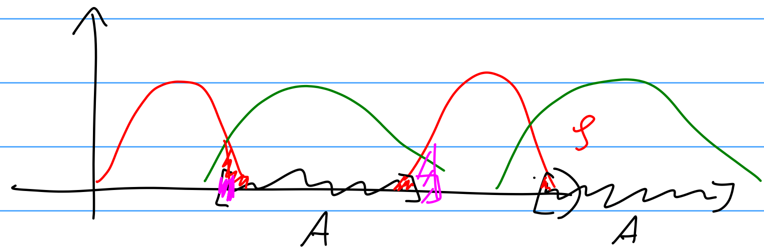
Neyman-Pearson Lemma

Motivation: H: X ist gemäß Dichte ρ_0 verteilt

G: X ist gemäß Dichte η verteilt.



Frage: Nehmen wir an α-Fehler ist gegeben. Für welche Menge $A \subset \Omega$ ist der β-Fehler am kleinsten.

Vorgehensweise: Betrachte $\frac{\rho}{\eta}$. Für jedes $c \in \mathbb{R}^+$ definiere

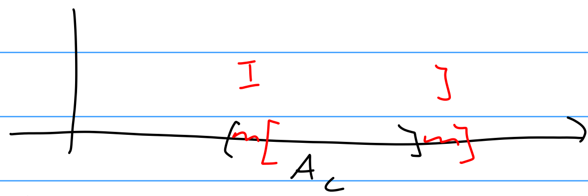
$$A_c \text{ über } \omega \in A_c \iff \frac{\rho}{\eta}(\omega) \leq c$$

Wähle c so, dass $\mathbb{P}_H(A_c) = \alpha$.

Lemma: Unter allen $B \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}_H(B) = \alpha$ ist

$$\mathbb{P}_G(B) \geq \mathbb{P}_G(A_c)$$

Beweis:



$I := A \setminus B \qquad J = B \setminus A$

$$\int_I \rho \, dx = \int_J \rho \, dx \qquad (\alpha \text{ Fehler fix})$$

$$0 = \int_{\underset{\subset A}{I}} \rho \, dx - \int_{\underset{\text{außerhalb } A}{J}} \rho \, dx \qquad \frac{\rho}{\eta}(\omega) \leq c \iff \omega \in A_c$$

$f \leq c\eta$ $\qquad$ $f > c\cdot\eta$

$$0 \leq \int_I c\eta \, dx - \int_J c\eta + \int_{A\cap B} c\eta - \int_{A\cap B} c\eta$$

$$0 \leq c\int_A \eta \, dx - c\int_B \eta \, dx \implies \int_B \eta \, dx \leq \int_A \eta \, dx$$

$$\int_{B^c} \eta \, dx \geq \int_{A^c} \eta \, dx$$

B für B $\qquad$ A für A