Probeklausur zur Stochastik

Peter Pickl
Fachbereich Mathematik, Universität Tübingen

16.07.2024

- Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie abgeben, oben rechts Ihren Namen. Beginnen Sie mit einer neuen Aufgabe immer ein neues Blatt. Kein Blatt soll Lösungvorschläge mehrerer Aufgaben beinhalten, das Verwenden mehrerer Blätter für eine Aufgabe ist natürlich zulässig.
- Erlaubte Hilfsmittel sind Schreibzeug und ein DIN A4 Blatt, das beidseitig handschriftlich beschrieben sein darf (legaler "Spickzettel"). Papier für die Lösungen wird gestellt. Ein nicht programmierbarer Taschenrechner ist zulässig.
- Sollten Sie Kommunikationsgeräte bei sich führen (Handy, Laptop, etc.) sind diese verschlossen aufzubewahren, z.B. in einem Rucksack mit geschlos-senem Reißverschluss. Gleiches gilt für jegliches Material, das mit dem Kurs zu tun hat (Bücher, Skripte etc.).
- Jede Aufgabe gibt die gleiche Punktzahl.
- Bei Bedarf kann zusätzliches Papier angefordert werden.
- Die Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.

Name, Vorname:..

Matrikelnummer:..

Studiengang:...

Für Studierende der Physik: Wo wurde die Studienleistung erworben (falls nicht bei uns)

....

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1: Es sei $\Omega \neq \emptyset$ eine endliche Menge.

Es sei $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ gegeben durch $A \in \mathcal{D} \Leftrightarrow |A|$ oder $|A^c|$ ist Vielfaches von 3.

Für welche Werte von $|\Omega|$ ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Lösung: Da $|\emptyset| = 0$ ist gilt, dass $\emptyset$ und Ω immer in $\mathcal{D}$ enthalten sind. Falls $|\Omega| = 1$ oder $|\Omega| = 2$ gibt es keine weiteren Mengen in $\mathcal{D}$. Für beide Fälle ist $\mathcal{D}$ also ein Dynkin-System.

Die Eigenschaft, "$|A|$ oder $|A^c|$ is Vielfaches von 3" ist unter Komplementbildung erhalten. Dadurch ist für jedes $A \in \mathcal{D}$ auch $A^c \in \mathcal{D}$.

Falls $|\Omega|$ Vielfaches von 3 ist, so gilt $|A|$ ist Vielfaches von 3 $\Leftrightarrow$ A^c ist Vielfaches von 3. Für beliebige, disjunkte $A_j \in \mathcal{D}$ ist also $|A_j|$ jeweils vielfaches von 3, somit ist auch die disjunkte Vereinigung der A_j vielfaches von 3 und somit Element von $\mathcal{D}$. Somit ist, falls $|\Omega|$ Vielfaches von 3 , $\mathcal{D}$ ein Dynkinsystem.

Sei nun $|\mathcal{D}|$ kein Vielfaches von 3 und grösser als 3, also a) $|\Omega| = 3k+1$ oder b) $|\Omega| = 3k+2$ für $k \geq 1$. Dann ist jedes $A \subset \Omega$ mit $|A| = 1$ bzw $|A| = 2$ ein Element von $\mathcal{D}$. Für $k \neq 0$ gibt es mindestens zwei disjunkte solcher Mengen. Die disjunkte Vereinigung zweier solcher $A's$ hat dann 2 bzw. 4 solcher Elemente.

Eine zweielementige Menge (vierelementige bzw. Menge im zweiten Fall) kann jedoch kein Element von $\mathcal{D}$ sein, da die Elentzahl kein Vielfaches von 3 ist und das Komplement $3k-1$ (bzw. $3k-2$) Elemente hat. Damit ist $\mathcal{D}$ kein Dynkin-System.

Die Antwort lautet also $|\Omega| \in \{1,2\} \cup \{3k \text{ mit } k \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 2: Gegeben seien zwei unabhängige Zufallsgrößen $X, Y : \Omega \to [0,1]$, die jeweils auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilt sind.

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $X+Y$ und YX^3.

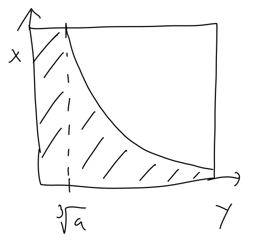
Lösung: $x + y \leq a \Leftrightarrow x \leq a - y$.

1. Fall: $a \leq 1$. Die günstige Menge ist also das entsprechende Dreieck mit Ecken $(0,0), (0,a), (a,0)$. Disese hat die Fläche $\frac{a^2}{2}$.

2. Fall: $1 < a < 2$: Dann hat man als Ergebnis das ganze Quadrat minus dem Dreieck mit den Ecken $(1,1), (a-1,1), (1,a-1)$. Das hat eine Fläche von $1-(2-a)^2/2 = -1+2a-a^2/2$.

Die Verteilungsfunktion von XY^3 erhält man durch Betrachtung von $xy^3 \leq a$, d.h. $x \leq a/y^3$.

Dies ist der schraffierte Bereich in fomgender Zeichnung:



Dieser besteht aus dem Rechteck mit Basis der Länge $\sqrt[3]{a}$ und Höhe 1, sowie der Flächs unter der Kurve $x = a/y^3$ zwischen $\sqrt[3]{a}$ und 1.

also

$$\sqrt[3]{a} + \int_{\sqrt[3]{a}}^{1} a/y^3 dy = \sqrt[3]{a} + \left[-a/(2y^2)\right]_{\sqrt[3]{a}}^{1} = \sqrt[3]{a} - \frac{a}{2} + \frac{\sqrt[3]{a}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{a} - \frac{a}{2}$$

Aufgabe 3: Sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und endlicher Varianz σ^2. Sei $k > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X - \mu \geq k) = \mathbb{P}(X - \mu + \lambda \geq k + \lambda)$$

und mit Hilfe der Markov-Ungleichung, dass

$$\mathbb{P}(X - \mu \geq k) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(k+\lambda)^2} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(b) Zeigen Sie die Gültigkeit der sogenannten Cantelli-Ungleichung:

$$\mathbb{P}(X - \mu \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2 + \sigma^2}$$

(c) Zeigen sie nun, dass :

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{2\sigma^2}{k^2 + \sigma^2}\ .$$

Für welche Werte von k ist diese Ungleichung schärfer als Tschebyscheff- Ungleichung?

Lösung:

(a) Die Verschiebung ist eine Äquivalenzumformung, also ist $X - \mu \geq k$ die selbe menge wie $X - \mu + \lambda \geq k + \lambda$.

Markov mit zweiter Potenz ergibt

$$\mathbb{P}(X - \mu + \lambda \geq k + \lambda) \leq \mathbb{E}\left((X - \mu + \lambda)^2\right)/(k+\lambda)^2$$

Es ist $\mathbb{E}\left((X-\mu+\lambda)^2\right) = VarX + 2\lambda\mathbb{E}(X-\mu) + \lambda^2$. Da $\mathbb{E}(X-\mu) = 0$ folgt die Behauptung.

(b) Es gilt zu zeigen, dass es ein λ gibt, so dass

$$\frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(k+\lambda)^2} \leq \frac{\sigma^2}{k^2 + \sigma^2}$$

Dann folgt mit (a) die Aussage.

Wir suchen das Minimum von $\frac{\sigma^2+\lambda^2}{(k+\lambda)^2}$ als Funktion von λ. Diese erhält man durch Ableiten des Ausdrucks nach λ und Nollsetzen des Zählers:

$$\begin{aligned} 2\lambda(k+\lambda)^2 - 2(\sigma^2+\lambda^2)(k+\lambda) &= 0 \quad |: 2(k+\lambda) \\ \lambda(k+\lambda) - (\sigma^2+\lambda^2) &= 0 \\ \lambda k + \lambda^2 - \sigma^2 - \lambda^2 &= 0 \\ \lambda &= \sigma^2/k. \end{aligned}$$

Dieses λ eingesetzt ergibt

$$\frac{\sigma^2+\lambda^2}{(k+\lambda)^2} = \sigma^2 \frac{1 + \frac{\sigma^2}{k^2}}{(k^2+\sigma^2)/k^2}$$

Erweitern mit k^2 und Kürzen ergibt

$$\frac{\sigma^2}{k^2+\sigma^2}$$

(c) Es sei $Y = -X$ dann erhält man wegen (b)

$$\mathbb{P}\left(Y - \mu_Y \geq k\right) \leq \frac{\sigma^2}{k^2 + \sigma^2}$$

Da der Erwartungswert von Y gleich minus der Erwartungswert von X ist, ergibt das

$$\mathbb{P}\left(-X + \mu \geq k\right) \leq \frac{\sigma^2}{k^2 + \sigma^2}$$

Zusammen mit b) folgt

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu| \geq k\right) \leq \frac{2\sigma^2}{k^2 + \sigma^2}\ .$$

Tschebyscheff ergibt als Abschätzung $\frac{\sigma^2}{k^2} = \frac{2\sigma^2}{2k^2}$.

Falls also $\sigma^2 > k^2$ ist, so ist die Ungleichung in c) besser als Tschebyscheff. Dies bedeutet $|\sigma| > |k|$.

Aufgabe 4: Gegeben sei ein Laplace-Würfel, den sie unendlich oft werfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl 6 unendlich oft geworfen wird? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Lösung: Wir betrachten das Gegenereignis, also das Ereignis A, dass nur endlich oft eine 6 geworfen wird. Es gilt zu zeigen, dass $\mathbb{P}\left(A\right) = 0$.

Sei A_n das Ereignis dass nach n Würfen keine 6 mehr erscheint. Es ist $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. somit ist $\mathbb{P}\left(A\right) \leq \sum_{j01}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right)$.

Sein nun für $n < m$ A_n^m das event, dass bei m-maligen Würfen ab dem n-ten Wurf keine 6 mehr vorkommt. Es ist $A_n \subset A_n^m$ für alle m, also $\mathbb{P}\left(A_n\right) \leq \mathbb{P}\left(A_n^m\right) \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{m-n}$. Da dies für alle m gilt und die rechte seite für $m \to \infty$ gegen Null strebt, ist $\mathbb{P}\left(A_n\right) = 0$, somit ist $\mathbb{P}\left(A\right) = 0$.

Aufgabe 5: In Ihrem Besitz befanden sich einst zwei Münzen, von denen eine eine Laplace Münze war, die andere mit der Wahrscheinlichkeit 3/4 "Kopf" ergab.

Sie habe eine dieser Münzen wieder gefunden und möchten herausfinden, um welche der beiden Münzen es sich wohl handelt. Dazu werfen Sie die Münze 100-mal.

Formulieren Sie einen entsprechenden Hypothesentest mit der Vorgabe, dass Sie die Annahme, es handle sich um eine Laplace-Münze, fälschlicher Weise nur mit einem Fehler von maximal 5% verwerfen (α-Fehler).

Bestimmen Sie den β-Fehler.

Wie können sie es erreichen, dass sich α- und β- Fehler gleichzeitig im Wert verringern.

Lösung: Für die Hypothese "$p = 1/2$" ist $\mu_1 = 50$ und $\sigma_1 = \sqrt{npq} = 5$. Für die Hypothese "$p = 3/4$" ist $\mu_2 = 75$ und $\sigma_2 = \sqrt{300/16} \approx 4,33$.

Wir haben einen einseitigen Test. Für $\alpha = 5\%$ ist also die Abweichung von $1,64\sigma \approx 8$ relevant. Der Ablehnungsbereich der Hypothese "Laplace" ist also $[59, 100]$. Der Ablehnungsbereich der anderen Hypothese ist $[0, 58]$.

Der Abstand zwischen μ_2 und 58 beträgt 17. Dies entspricht mehr als 3 Standardabweichungen. Der β-Fehler liegt also unter $1,5\%$.

Beide Fehler können gleichzeitig verkleinert werden, indem man die Zahl der Stichprobe bei gleichbleibender Wahl des Ablehnungsbereiches der ersten Hypothese erhöht.

Tabellenwerte für die Verteilungsfunktion $y = V_{\mathcal{N}(0,1)}(x)$ der Standard-Normalverteilung

x	1/2	1	1,64	2	3
y	0,69	0,84	0,95	0,975	0,9986