Probeklausur zur Stochastik

Peter Pickl
Fachbereich Mathematik, Universität Tübingen

16.07.2024

- Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie abgeben, oben rechts Ihren Namen. Beginnen Sie mit einer neuen Aufgabe immer ein neues Blatt. Kein Blatt soll Lösungvorschläge mehrerer Aufgaben beinhalten, das Verwenden mehrerer Blätter für eine Aufgabe ist natürlich zulässig.
- Erlaubte Hilfsmittel sind Schreibzeug und ein DIN A4 Blatt, das beidseitig handschriftlich beschrieben sein darf (legaler "Spickzettel"). Papier für die Lösungen wird gestellt. Ein nicht programmierbarer Taschenrechner ist zulässig.
- Sollten Sie Kommunikationsgeräte bei sich führen (Handy, Laptop, etc.) sind diese verschlossen aufzubewahren, z.B. in einem Rucksack mit geschlos-senem Reißverschluss. Gleiches gilt für jegliches Material, das mit dem Kurs zu tun hat (Bücher, Skripte etc.).
- Jede Aufgabe gibt die gleiche Punktzahl.
- Bei Bedarf kann zusätzliches Papier angefordert werden.
- Die Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.

Name, Vorname:...

Matrikelnummer:...

Studiengang:...

Für Studierende der Physik: Wo wurde die Studienleistung erworben (falls nicht bei uns)

....

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1: Es sei $\Omega \neq \emptyset$ eine endliche Menge.

Es sei $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ gegeben durch $A \in \mathcal{D} \Leftrightarrow |A|$ oder $|A^c|$ ist Vielfaches von 3.

Für welche Werte von $|\Omega|$ ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 2: Gegeben seien zwei unabhängige Zufallsgrößen $X, Y : \Omega \to [0,1]$, die jeweils auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilt sind.

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $X + Y$ und YX^3.

Aufgabe 3: Sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und endlicher Varianz σ^2. Sei $k > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X - \mu \geq k) = \mathbb{P}(X - \mu + \lambda \geq k + \lambda)$$

und mit Hilfe der Markov-Ungleichung, dass

$$\mathbb{P}(X - \mu \geq k) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(k+\lambda)^2} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(b) Zeigen Sie die Gültigkeit der sogenannten Cantelli-Ungleichung:

$$\mathbb{P}(X - \mu \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2 + \sigma^2}$$

(c) Zeigen sie nun, dass :

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{2\sigma^2}{k^2 + \sigma^2} .$$

Für welche Werte von k ist diese Ungleichung schärfer als Tschebyscheff- Ungleichung?

Aufgabe 4: Gegeben sei ein Laplace-Würfel, den sie unendlich oft werfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl 6 unendlich oft geworfen wird? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 5: In Ihrem Besitz befanden sich einst zwei Münzen, von denen eine eine Laplace Münze war, die andere mit der Wahrscheinlichkeit 3/4 "Kopf" ergab.

Sie habe eine dieser Münzen wieder gefunden und möchten herausfinden, um welche der beiden Münzen es sich wohl handelt. Dazu werfen Sie die Münze 100-mal.

Formulieren Sie einen entsprechenden Hypothesentest mit der Vorgabe, dass Sie die Annahme, es handle sich um eine Laplace-Münze, fälschlicher Weise nur mit einem Fehler von maximal 5% verwerfen (α-Fehler).

Bestimmen Sie den β-Fehler.

Wie können sie es erreichen, dass sich α- und β- Fehler gleichzeitig im Wert verringern.

Tabellenwerte für die Verteilungsfunktion $y = V_{\mathcal{N}(0,1)}(x)$ der Standard-Normalverteilung

x	1/2	1	1,64	2	3
y	0,69	0,84	0,95	0,975	0,9986