Verteilung mehrerer Zufallsvariablen

Peter Pickl

Mathematisches Institut, Universität Tübingen

5. Juni 2024

Unabhängige Zufallsgrößen

Im Falle unabhängiger Zufallsgrößen ist die Situation besonders.

- zum Beispiel ist $V_{X,Y}(a,b) = \mathbb{P}(X \leq a \text{ und } Y \leq b) = \mathbb{P}(X \leq a)\,\mathbb{P}(Y \leq b) = V_X(a)V_Y(b)$.
- Wie sieht es mit der Summe von zwei unabhängigen Zufallsvariablen aus?
- Wir betrachten dazu die Zufallsvariablen X und Y mit den Wahrscheinlichkeitsdichten ρ und η.
- Man erhält wegen der Unabhängigkeit durch das Produkt von ρ und η eine Dichte für (X, Y).
- Es ist also $\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \int_A \rho(x)\eta(y)dxdy$.

Unabhängige Zufallsgrößen

Im Falle unabhängiger Zufallsgrößen ist die Situation besonders.

- zum Beispiel ist $V_{X,Y}(a,b) = \mathbb{P}\left(X \leq a \text{ und } Y \leq b\right) = \mathbb{P}\left(X \leq a\right)\mathbb{P}\left(Y \leq b\right) = V_X(a)V_Y(b)$.
- Wie sieht es mit der Summe von zwei unabhängigen Zufallsvariablen aus?
- Wir betrachten dazu die Zufallsvariablen X und Y mit den Wahrscheinlichkeitsdichten ρ und η.
- Man erhält wegen der Unabhängigkeit durch das Produkt von ρ und η eine Dichte für (X,Y).
- Es ist also $\mathbb{P}\left((X,Y) \in A\right) = \int_A \rho(x)\eta(y)dxdy$.

Unabhängige Zufallsgrößen

Im Falle unabhängiger Zufallsgrößen ist die Situation besonders.

- zum Beispiel ist $V_{X,Y}(a,b) = \mathbb{P}\left(X \leq a \text{ und } Y \leq b\right) = \mathbb{P}\left(X \leq a\right)\mathbb{P}\left(Y \leq b\right) = V_X(a)V_Y(b)$.
- Wie sieht es mit der Summe von zwei unabhängigen Zufallsvariablen aus?
- Wir betrachten dazu die Zufallsvariablen X und Y mit den Wahrscheinlichkeitsdichten ρ und η.
- Man erhält wegen der Unabhängigkeit durch das Produkt von ρ und η eine Dichte für (X,Y).
- Es ist also $\mathbb{P}\left((X,Y) \in A\right) = \int_A \rho(x)\eta(y)dxdy$.

Unabhängige Zufallsgrößen

Im Falle unabhängiger Zufallsgrößen ist die Situation besonders.

- zum Beispiel ist $V_{X,Y}(a,b) = \mathbb{P}(X \leq a \text{ und } Y \leq b) = \mathbb{P}(X \leq a)\,\mathbb{P}(Y \leq b) = V_X(a)V_Y(b)$.
- Wie sieht es mit der Summe von zwei unabhängigen Zufallsvariablen aus?
- Wir betrachten dazu die Zufallsvariablen X und Y mit den Wahrscheinlichkeitsdichten ρ und η.
- Man erhält wegen der Unabhängigkeit durch das Produkt von ρ und η eine Dichte für (X, Y).
- Es ist also $\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \int_A \rho(x)\eta(y)dxdy$.

Unabhängige Zufallsgrößen

Im Falle unabhängiger Zufallsgrößen ist die Situation besonders.

- zum Beispiel ist $V_{X,Y}(a,b) = \mathbb{P}\left(X \leq a \text{ und } Y \leq b\right) = \mathbb{P}\left(X \leq a\right)\mathbb{P}\left(Y \leq b\right) = V_X(a)V_Y(b)$.
- Wie sieht es mit der Summe von zwei unabhängigen Zufallsvariablen aus?
- Wir betrachten dazu die Zufallsvariablen X und Y mit den Wahrscheinlichkeitsdichten ρ und η.
- Man erhält wegen der Unabhängigkeit durch das Produkt von ρ und η eine Dichte für (X, Y).
- Es ist also $\mathbb{P}\left((X, Y) \in A\right) = \int_A \rho(x)\eta(y)dxdy$.

Unabhängige Zufallsgrößen

Im Falle unabhängiger Zufallsgrößen ist die Situation besonders.

- zum Beispiel ist $V_{X,Y}(a,b) = \mathbb{P}\left(X \leq a \text{ und } Y \leq b\right) = \mathbb{P}\left(X \leq a\right)\mathbb{P}\left(Y \leq b\right) = V_X(a)V_Y(b)$.
- Wie sieht es mit der Summe von zwei unabhängigen Zufallsvariablen aus?
- Wir betrachten dazu die Zufallsvariablen X und Y mit den Wahrscheinlichkeitsdichten ρ und η.
- Man erhält wegen der Unabhängigkeit durch das Produkt von ρ und η eine Dichte für (X, Y).
- Es ist also $\mathbb{P}\left((X,Y) \in A\right) = \int_A \rho(x)\eta(y)dxdy$.

Verteilungsfunktion

- Insbesondere ist in diesem Fall $V_{X+Y}(a) = \mathbb{P}(X+Y \leq a)$ gegeben durch $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{a-y}\rho(x)\eta(y)dxdy$
- Also ist $V_{X+Y}(a) = \mathbb{P}(X+Y \leq a) = \int V_X(a-y)\eta(y)dy$
- Da die $V_X(a) = \int_{-\infty}^{a}\rho(x)dx$ ist die Dichte immer die Ableitung von V_X.
- $X+Y$ hat daher an der Stelle a die Wahrscheinlichkeitsdichte $\int \rho(a-y)\eta(y)dy$.
- Den letzten Ausdruck nennt man auch die Faltung von ρ mit η
- Schreibweise: $\rho \star \eta := \int \rho(a-y)\eta(y)dy = \int \eta(a-y)\rho(y)dy$

Verteilungsfunktion

- Insbesondere ist in diesem Fall $V_{X+Y}(a) = \mathbb{P}(X + Y \leq a)$ gegeben durch $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a-y} \rho(x)\eta(y)dxdy$
- Also ist $V_{X+Y}(a) = \mathbb{P}(X + Y \leq a) = \int V_X(a - y)\eta(y)dy$
- Da die $V_X(a) = \int_{-\infty}^{a} \rho(x)dx$ ist die Dichte immer die Ableitung von V_X.
- $X + Y$ hat daher an der Stelle a die Wahrscheinlichkeitsdichte $\int \rho(a - y)\eta(y)dy$.
- Den letzten Ausdruck nennt man auch die Faltung von ρ mit η
- Schreibweise: $\rho \star \eta := \int \rho(a - y)\eta(y)dy = \int \eta(a - y)\rho(y)dy$

Verteilungsfunktion

- Insbesondere ist in diesem Fall $V_{X+Y}(a) = \mathbb{P}(X + Y \leq a)$ gegeben durch $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a-y} \rho(x)\eta(y)dxdy$
- Also ist $V_{X+Y}(a) = \mathbb{P}(X + Y \leq a) = \int V_X(a - y)\eta(y)dy$
- Da die $V_X(a) = \int_{-\infty}^{a} \rho(x)dx$ ist die Dichte immer die Ableitung von V_X.
- $X + Y$ hat daher an der Stelle a die Wahrscheinlichkeitsdichte $\int \rho(a - y)\eta(y)dy$.
- Den letzten Ausdruck nennt man auch die Faltung von ρ mit η
- Schreibweise: $\rho \star \eta := \int \rho(a - y)\eta(y)dy = \int \eta(a - y)\rho(y)dy$

Verteilungsfunktion

- Insbesondere ist in diesem Fall $V_{X+Y}(a) = \mathbb{P}(X + Y \leq a)$ gegeben durch $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a-y} \rho(x)\eta(y)dxdy$
- Also ist $V_{X+Y}(a) = \mathbb{P}(X + Y \leq a) = \int V_X(a-y)\eta(y)dy$
- Da die $V_X(a) = \int_{-\infty}^{a} \rho(x)dx$ ist die Dichte immer die Ableitung von V_X.
- $X + Y$ hat daher an der Stelle a die Wahrscheinlichkeitsdichte $\int \rho(a-y)\eta(y)dy$.
- Den letzten Ausdruck nennt man auch die Faltung von ρ mit η
- Schreibweise: $\rho \star \eta := \int \rho(a-y)\eta(y)dy = \int \eta(a-y)\rho(y)dy$

Verteilungsfunktion

- Insbesondere ist in diesem Fall $V_{X+Y}(a) = \mathbb{P}(X + Y \leq a)$ gegeben durch $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a-y} \rho(x)\eta(y)dxdy$
- Also ist $V_{X+Y}(a) = \mathbb{P}(X + Y \leq a) = \int V_X(a-y)\eta(y)dy$
- Da die $V_X(a) = \int_{-\infty}^{a} \rho(x)dx$ ist die Dichte immer die Ableitung von V_X.
- $X + Y$ hat daher an der Stelle a die Wahrscheinlichkeitsdichte $\int \rho(a-y)\eta(y)dy$.
- Den letzten Ausdruck nennt man auch die Faltung von ρ mit η
- Schreibweise: $\rho \star \eta := \int \rho(a-y)\eta(y)dy = \int \eta(a-y)\rho(y)dy$

Verteilungsfunktion

- Insbesondere ist in diesem Fall $V_{X+Y}(a) = \mathbb{P}\left(X + Y \leq a\right)$ gegeben durch $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a-y} \rho(x)\eta(y)dxdy$
- Also ist $V_{X+Y}(a) = \mathbb{P}\left(X + Y \leq a\right) = \int V_X(a-y)\eta(y)dy$
- Da die $V_X(a) = \int_{-\infty}^{a} \rho(x)dx$ ist die Dichte immer die Ableitung von V_X.
- $X + Y$ hat daher an der Stelle a die Wahrscheinlichkeitsdichte $\int \rho(a-y)\eta(y)dy$.
- Den letzten Ausdruck nennt man auch die Faltung von ρ mit η
- Schreibweise: $\rho \star \eta := \int \rho(a-y)\eta(y)dy = \int \eta(a-y)\rho(y)dy$