Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 9

Aufgabe 1: Es seien $a \in \mathbb{R}^+$, X eine Zufallsvariable für die fast sicher $|X| \leq a$ gilt. Es sei $\mathbb{E}\left(|X|\right) = \mu$. Zeigen Sie: Für alle $c < 1$ gilt:

$$\mathbb{P}\big(|X| \leq (1-c)\mu\big) \leq 1 - \frac{c}{a}\mu$$

Aufgabe 2: Ein Laplace-Würfel wird 6000 mal unabhängig geworfen. Bestimmen Sie eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl an Einsen, die Sie dabei erzielen, vom Erwartungswert um mehr als

(a) 10

(b) 100

(c) 1000

abweicht.

Aufgabe 3: Es sei X eine Normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz 1. Eine solche Zufallsvariable nennt man "standard-normalverteilt". Gegeben Sei die Zufallsvariable Y durch $Y = -X$ falls $|X| < a$ und $Y = X$ falls $|X| \geq a$.

Zeigen Sie

(a) Y ist ebenfalls standard-normalverteilt.

(b) X und Y sind nicht unabhängig.

(c) Es gibt einen Wert für a, so dass X und Y unkorreliert sind.

Aufgabe 4: Ein Laplace- Oktaeder wird geworfen. Die möglichen erreichbaren Augenzahlen sind 1,2,... 8. Gegeben seien die drei Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 durch

(a) $X_1 = 1$ falls die geworfene Augenzahl eine Primzahl ist, $X_1 = 0$ sonst.

(b) $X_2 = 1$ falls die geworfene Augenzahl gerade ist, $X_2 = 0$ sonst.

(c) $X_3 = 1$ falls die geworfene Augenzahl 1,2,3, oder 5, $X_3 = 0$ sonst.

Bestimmen Sie die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $(X_1, X_2, X - 3)$, d.h. die Matrix A mit den Einträgen $a_{ij} = Cov(X_i, X_j)$.

Finden Sie mit Hilfe von Methoden der linearen Algebra, drei von Null verschieden Zufallsgrößen Y_1,Y_2 und Y_3, die sich jeweils als Linearkombinationen von X_1, X_2 und X_3 schreiben lassen und paarweise unkorrelliert sind.

Bitte geben Sie das Übungsblatt jeweils zu zweit oder zu dritt bis spätestens 01.07.2024 um 14:00 über URM ab. Denken Sie daran, von allen zwei bzw. drei Personen die Namen auf dem Blatt anzugeben.