Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 7

Aufgabe 1: Gegeben seien zwei normal verteilte Zufallsvariablen X und Y mit den Parametern μ, σ bzw λ, τ. Zeigen Sie, dass auch $X+Y$ normalverteilt ist und bestimmen Sie die zugehörigen Werte der beiden Parameter.

Lösung:

Die zu $X+Y$ gehörige Dicht ist gegeben durch die Faltung der beiden Dichten, also

$$\int (2\pi\sigma\tau)^{-1} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(x-y-\lambda)^2}{2\tau^2}} dy = \int (2\pi\sigma\tau)^{-1} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{(x-y-\lambda)^2}{2\tau^2}} dy$$
$$= \int (2\pi\sigma\tau)^{-1} e^{-\frac{\tau^2(y-\mu)^2+\sigma^2(x-y-\lambda)^2}{2\sigma^2\tau^2}} dy = \int (2\pi\sigma\tau)^{-1} e^{-\frac{\tau^2 z^2+\sigma^2(k-z)^2}{2\sigma^2\tau^2}} dz$$

wobei wir im letzten Schritt die Translationsinvarianz des Integrals benutzt haben (Substitution $z = y - \mu$) und $k = x - \lambda - \mu$ gewählt haben Wir formen den Exponenten um mittel quadratischer Ergänzung:

$$\tau^2 z^2 + \sigma^2(k-z)^2 = (\tau^2+\sigma^2)z^2 - 2\sigma^2 kz + \sigma^2 k^2$$
$$=(\tau^2+\sigma^2)(z - \frac{\sigma^2 k}{\sigma^2+\tau^2})^2 + \sigma^2 k^2 - \frac{\sigma^4 k^2}{\sigma^2+\tau^2}$$
$$=(\tau^2+\sigma^2)(z - \frac{\sigma^2 k}{\sigma^2+\tau^2})^2 + \frac{\sigma^2\tau^2 k^2}{\sigma^2+\tau^2}$$

Man setzt dies für die Dichte ein und integriert die Variable z aus. Das z-integral ist über eine Gaussglocke, man erhält also für die Dichte

$$\int (2\pi\sigma\tau)^{-1} e^{-\frac{(\tau^2+\sigma^2)(z-\frac{\sigma^2 k}{\sigma^2+\tau^2})^2 + \frac{\sigma^2\tau^2 k^2}{\sigma^2+\tau^2}}{2\sigma^2\tau^2}} dz$$
$$= (2\pi\sigma\tau)^{-1} e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2+\tau^2}} \int e^{-\frac{(\tau^2+\sigma^2)(z-\frac{\sigma^2 k}{\sigma^2+\tau^2})^2}{\sigma^2+\tau^2}} 2\sigma^2\tau^2 dz$$
$$=(2\pi\sigma\tau)^{-1} e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2+\tau^2}} (2\pi\frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2})^{1/2}$$

Kürzen und umformen ergibt

$$(2\pi(\sigma^2+\tau^2))^{-1/2} e^{-\frac{(x-\mu-\lambda)^2}{2\sigma^2+\tau^2}}$$

wobei wir k rücksubstituiert haben. Man erhält also eine Normalverteilung mit Parametern $\mu + \lambda$ und $\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$