MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN SoSe 2024

Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 7

Aufgabe 1: Gegeben sei eine Münze, die, wenn man Sie wirft, mit der Wahrscheinlichkeit p "Kopf" ergibt. Diese Münze wird unabhängig so oft geworfen, bis zum ersten Mal Zahl erscheint. Die Zufallsvariable X gibt die entsprechende Zahl an Würfen an.

Bestimmen Sie für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = k)$, sowie die entsprechende Verteilungsfunktion und den Erwartungswert von X.

Bemerkung: Ein Zufallsgrösse, deren Verteilungsfunktion der von X entspricht, nennt man "geometrisch verteilt".

Aufgabe 2: Gegeben seien zwei unabhängige, normal verteilte Zufallsvariablen X und Y mit den Parametern μ, σ bzw λ, τ. Zeigen Sie, dass auch $X + Y$ normalverteilt ist und bestimmen Sie die zugehörigen Werte der beiden Parameter.

Aufgabe 3: Eine stetig verteilte Zufallsvariable X heißt exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, wenn die zugehörige Dichte ρ gegeben ist durch

$$\rho_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{sonst.} \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass ρ in der Tat eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert von ρ_λ

(c) Zeigen Sie, dass für $a > 0$ die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_{X \geq a}(X \in [a, a + \delta])$ nicht vom Parameter a abhängt.

Aufgabe 4: Gegeben sei eine Uhr, die zu zufälligen Zeiten klickt. Nehmen Sie an, die Dauer zwischen zwei Klicks sei jeweils exponentialverteilt mit für die Uhr fest vorgegebenem Parameter λ. Erklären sie kurz, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Uhr innerhalb eines Zeitintervalls von einer Sekunde klickt, unabhängig davon ist, wann der letzte Klick stattgefunden hat.

Sei T_k die Zufallsvariable, die den Zeitpunkt des k-ten Klicks beschreibt. Zeigen Sie, dass T_k die Verteilungsfunktion $V_{T_k}(a) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\lambda^j a^j}{j!} e^{-\lambda a}$ für $a \geq 0$ und $V_{T_k}(a) = 0$ für $a < 0$ besitzt.

Zeigen Sie, dass die Anzahl an Klicks, die bis zu einem festen Zeitpunkt T stattgefunden hat, Poisson-verteilt ist.

Bemerkung: Für ein radioaktives Material mit großer Teilchenzahl und langer Zerfallsdauer kann man obiges Verhalten experimentell beobachten. Das klicken ist in diesem Falls das Klicken eines Geigerzählers. Die Anzahl der zerfallenen und vom Geigerzähler detektierten Atome ist naturgemäß Poisson-verteilt.

Bitte geben Sie das Übungsblatt jeweils zu zweit oder zu dritt bis spätestens 17.06.2024 um 14:00 über URM ab. Denken Sie daran, von allen zwei bzw. drei Personen die Namen auf dem Blatt anzugeben.