

# Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

## Blatt 6

**Aufgabe 1:** Bei folgendem Spiel steht Ihnen ein Laplace-Würfel und ein Glücksrad zur Verfügung, mit welchem gleichverteilt ein Ergebnis im Bereich  $[0, 1[$  erreicht werden kann. Sie ermitteln einen Zahlenwert  $X$  gemäß folgender Spielregel: Sie werfen zunächst den Würfel. Sollte die angezeigte Augenzahl  $A$  ungerade sein so ist der Wert für  $X$  gleich  $\frac{1}{3}$ . Sollte die angezeigte Augenzahl  $A$  gerade sein, so drehen Sie  $A/2$ -mal das Glücksrad.  $X$  gleicht in diesem Fall dem Produkt der dabei erzielten Werte.

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von  $X$ .

**Aufgabe 2:** Es sei  $X$  eine reelle Zufallsvariable,  $f$  eine Funktion, die auf dem Wertebereich von  $X$  monoton wächst, d.h.  $f(x) \leq f(y)$  für alle  $x \leq y$  mit  $x, y \in W$ .

Dabei ist  $W = \{x \in \mathbb{R} : \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}$ .

Es sei  $Y = f(X)$ .

- Zeigen Sie, dass  $V_Y(f(a)) = V_X(a)$ .
- Zeigen Sie, dass für jede Zufallsgröße  $X$  gilt:  $V_{X^2}(a^2) = V_{|X|}(a)$
- Zeigen Sie, dass a) für nicht-monotone Funktionen  $f$  im allgemeinen nicht gilt.

**Aufgabe 3:** Finden Sie eine allgemeine Formel, die  $V_{|X|}$  durch  $V_X$  ausdrückt.

**Aufgabe 4:** Zeigen Sie

- Für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $\mathbb{P}(X^{-1}(a)) = V_X(a) - \lim_{x \rightarrow a-0} V_X(x)$ . ( $\lim_{x \rightarrow a-0}$  bezeichnet hier den linksseitigen Limes an der Stelle  $a$ )
- Falls für zwei Zufallsvariablen  $X, Y$  die Ungleichung  $X(\omega) \geq Y(\omega)$  für alle  $\omega \in \Omega$  gilt, so ist  $V_X(a) \leq V_Y(a)$  für alle  $a \in \mathbb{R}$ .

Bitte geben Sie das Übungsblatt jeweils zu zweit oder zu dritt bis spätestens 10.06.2024 um 14:00 über URM ab. Denken Sie daran, von allen zwei bzw. drei Personen die Namen auf dem Blatt anzugeben.