MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN

SoSe 2024

Stochastik

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 5

Aufgabe 1: Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie, dass die Eigenschaften

a) A ist unabhängig von B und A ist unabhängig von $C \Rightarrow A$ ist unabhängig von $B \cap C$

b) A ist unabhängig von B und A ist unabhängig von $C \Rightarrow A$ ist unabhängig von $B \cup C$

im allgemeinen nicht gelten. Wie sieht es unter der zusätzlichen Annahme, dass $A \cap B = \emptyset$ aus?

Aufgabe 2: Es seien Ω, Θ Mengen, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra bezüglich Ω, $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra bezüglich Θ und $X : \Omega \to \Theta$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die Menge

$$X^\star_{\mathcal{A},\mathcal{B}} := \left\{ B \in \mathcal{B} : X^{-1}(B) \in \mathcal{A} \right\}$$

eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 3: Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, Θ eine Menge und $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra bezüglich Θ. Es sei X eine zugehörige Zufallsvariable, d.h. eine $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-messbare Abbildung $\Omega \to \Theta$. Es sei $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass die Menge all jener Ereignisse $B \in \mathcal{B}$ so dass $X^{-1}(B)$ unabhängig von A ist, ein Dynkin-System ist.

Aufgabe 4: Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, Θ eine Menge und $\sigma(\mathcal{E})$ die vom schnittstabilen Erzeuger $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra bezüglich Θ. Es seien X, Y zugehörige Zufallsvariablen, d.h. $\mathcal{A} - \sigma(\mathcal{E})$-messbare Abbildungen $\Omega \to \Theta$. Zeigen Sie, dass X, Y bereits unabhängig sind, falls die Ereignisse $X^{-1}(E)$ und $Y^{-1}(F)$ für beliebige $E, F \in \mathcal{E}$ unabhängig sind.

Bitte geben Sie das Übungsblatt jeweils zu zweit oder zu dritt bis spätestens 03.06.2024 um 14:00 über URM ab. Denken Sie daran, von allen zwei bzw. drei Personen die Namen auf dem Blatt anzugeben.