Verteilung mehrerer Zufallsvariablen

Peter Pickl

Mathematisches Institut, Universität Tübingen

5. Juni 2024

Eigenschaften

Definition: Seien X, Y Zufallsvariablen. Die Funktion $V_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ gegeben durch

$$V_{X,Y}(a,b) := \mathbb{P}\left(X \leq a \text{ und } Y \leq b\right)$$

nennt man <u>gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y.</u>

Satz: $V_{X,Y}$ hat folgende Eigenschaften:

(a) Für jede Folge $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ oder $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 0$.

(b) Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 1$.

(c) Stetigkeit von rechts-oben: Für jede Folge $(s_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{n\to\infty}(s_n, t_n) = 0$ und für jedes $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a + s_n, b + t_n) = V_{X,Y}(a,b)\,.$$

Eigenschaften

Definition: Seien X, Y Zufallsvariablen. Die Funktion $V_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ gegeben durch

$$V_{X,Y}(a,b) := \mathbb{P}\left(X \leq a \text{ und } Y \leq b\right)$$

nennt man <u>gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y.</u>

Satz: $V_{X,Y}$ hat folgende Eigenschaften:

(a) Für jede Folge $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ oder $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 0$.

(b) Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 1$.

(c) Stetigkeit von rechts-oben: Für jede Folge $(s_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{n\to\infty}(s_n, t_n) = 0$ und für jedes $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a + s_n, b + t_n) = V_{X,Y}(a,b)\ .$$

Eigenschaften

Definition: Seien X, Y Zufallsvariablen. Die Funktion $V_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ gegeben durch

$$V_{X,Y}(a,b) := \mathbb{P}\left(X \leq a \text{ und } Y \leq b\right)$$

nennt man gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y.

Satz: $V_{X,Y}$ hat folgende Eigenschaften:

(a) Für jede Folge $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ oder $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 0$.

(b) Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 1$.

(c) Stetigkeit von rechts-oben: Für jede Folge $(s_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{n\to\infty}(s_n, t_n) = 0$ und für jedes $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a + s_n, b + t_n) = V_{X,Y}(a,b)\ .$$

Eigenschaften

Definition: Seien X, Y Zufallsvariablen. Die Funktion $V_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ gegeben durch

$$V_{X,Y}(a,b) := \mathbb{P}\left(X \leq a \text{ und } Y \leq b\right)$$

nennt man gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y.

Satz: $V_{X,Y}$ hat folgende Eigenschaften:

(a) Für jede Folge $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ oder $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 0$.

(b) Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 1$.

(c) Stetigkeit von rechts-oben: Für jede Folge $(s_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{n\to\infty}(s_n, t_n) = 0$ und für jedes $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a + s_n, b + t_n) = V_{X,Y}(a,b) .$$

Eigenschaften

Definition: Seien X, Y Zufallsvariablen. Die Funktion $V_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ gegeben durch

$$V_{X,Y}(a,b) := \mathbb{P}\left(X \leq a \text{ und } Y \leq b\right)$$

nennt man gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y.

Satz: $V_{X,Y}$ hat folgende Eigenschaften:

(a) Für jede Folge $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ oder $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 0$.

(b) Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 1$.

(c) Stetigkeit von rechts-oben: Für jede Folge $(s_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{n\to\infty}(s_n, t_n) = 0$ und für jedes $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a + s_n, b + t_n) = V_{X,Y}(a,b)\,.$$

Eigenschaften

(a) Für jede Folge $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ oder $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 0$.
Beweis: Es sei o.B.d.A. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Da das Ereignis "$X \leq a_n$ und $Y \leq b_n$" eine Teilmenge von $X \leq a_n$ ist, gilt

$$V_{X,Y}(a_n, b_n) \leq V_X(a_n)$$

Da letztere im Limes $n \to \infty$ Null ergibt, folgt die Aussage ($\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 0$).

Eigenschaften

(a) Für jede Folge $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ oder $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 0$.
Beweis: Es sei o.B.d.A. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Da das Ereignis "$X \leq a_n$ und $Y \leq b_n$" eine Teilmenge von $X \leq a_n$ ist, gilt

$$V_{X,Y}(a_n, b_n) \leq V_X(a_n)$$

Da letztere im Limes $n \to \infty$ Null ergibt, folgt die Aussage ($\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 0$).

Eigenschaften

(a) Für jede Folge $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ oder $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 0$.
Beweis: Es sei o.B.d.A. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Da das Ereignis "$X \leq a_n$ und $Y \leq b_n$" eine Teilmenge von $X \leq a_n$ ist, gilt

$$V_{X,Y}(a_n, b_n) \leq V_X(a_n)$$

Da letztere im Limes $n \to \infty$ Null ergibt, folgt die Aussage ($\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 0$).

Eigenschaften

(b) Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 1$.

Beweis: Betrachte $c_n := \inf_{k\geq n} a_n$ und $d_n := \inf_{k\geq n} b_n$. Es gilt offensichtlich, dass $V_{X,Y}(c_n, d_n) \leq V_{X,Y}(a_n, b_n)$.
Es reicht also zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(c_n, d_n) = 1$.
Die Folgen c_n und d_n sind monoton wachsend und ergeben im Limes ∞.
Daher ist die Folge der Ereignisse "$X \leq c_n$ und $Y \leq d_n$" eine monoton wachsende Folge mit $\lim_{n\to\infty}]-\infty, c_n] \times]-\infty, d_n] = \mathbb{R}^2$.
Somit ist wegen der Stetigkeit von $\mathbb{P}$ der Limes
$\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(c_n, d_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X \leq c_n \text{ und } Y \leq d_n\right) = \mathbb{P}\left(\mathbb{R}^2\right) = 1$.

Eigenschaften

(b) Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 1$.
Beweis: Betrachte $c_n := \inf_{k\geq n} a_n$ und $d_n := \inf_{k\geq n} b_n$. Es gilt offensichtlich, dass $V_{X,Y}(c_n, d_n) \leq V_{X,Y}(a_n, b_n)$.
Es reicht also zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(c_n, d_n) = 1$.
Die Folgen c_n und d_n sind monoton wachsend und ergeben im Limes ∞.
Daher ist die Folge der Ereignisse "$X \leq c_n$ und $Y \leq d_n$" eine monoton wachsende Folge mit $\lim_{n\to\infty}]-\infty, c_n]\times]-\infty, d_n] = \mathbb{R}^2$.
Somit ist wegen der Stetigkeit von $\mathbb{P}$ der Limes
$\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(c_n, d_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X \leq c_n \text{ und } Y \leq d_n\right) = \mathbb{P}\left(\mathbb{R}^2\right) = 1$.

Eigenschaften

(b) Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 1$.

Beweis: Betrachte $c_n := \inf_{k\geq n} a_n$ und $d_n := \inf_{k\geq n} b_n$. Es gilt offensichtlich, dass $V_{X,Y}(c_n, d_n) \leq V_{X,Y}(a_n, b_n)$.

Es reicht also zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(c_n, d_n) = 1$.

Die Folgen c_n und d_n sind monoton wachsend und ergeben im Limes ∞.

Daher ist die Folge der Ereignisse "$X \leq c_n$ und $Y \leq d_n$" eine monoton wachsende Folge mit $\lim_{n\to\infty}]-\infty, c_n] \times]-\infty, d_n] = \mathbb{R}^2$.

Somit ist wegen der Stetigkeit von $\mathbb{P}$ der Limes

$\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(c_n, d_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X \leq c_n \text{ und } Y \leq d_n\right) = \mathbb{P}\left(\mathbb{R}^2\right) = 1$.

Eigenschaften

(b) Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 1$.

Beweis: Betrachte $c_n := \inf_{k\geq n} a_n$ und $d_n := \inf_{k\geq n} b_n$. Es gilt offensichtlich, dass $V_{X,Y}(c_n, d_n) \leq V_{X,Y}(a_n, b_n)$.

Es reicht also zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(c_n, d_n) = 1$.

Die Folgen c_n und d_n sind monoton wachsend und ergeben im Limes ∞.

Daher ist die Folge der Ereignisse "$X \leq c_n$ und $Y \leq d_n$" eine monoton wachsende Folge mit $\lim_{n\to\infty}]-\infty, c_n]\times]-\infty, d_n] = \mathbb{R}^2$.

Somit ist wegen der Stetigkeit von $\mathbb{P}$ der Limes $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(c_n, d_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X \leq c_n \text{ und } Y \leq d_n\right) = \mathbb{P}\left(\mathbb{R}^2\right) = 1$.

Eigenschaften

(b) Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 1$.
Beweis: Betrachte $c_n := \inf_{k\geq n} a_n$ und $d_n := \inf_{k\geq n} b_n$. Es gilt offensichtlich, dass $V_{X,Y}(c_n, d_n) \leq V_{X,Y}(a_n, b_n)$.
Es reicht also zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(c_n, d_n) = 1$.
Die Folgen c_n und d_n sind monoton wachsend und ergeben im Limes ∞.
Daher ist die Folge der Ereignisse "$X \leq c_n$ und $Y \leq d_n$" eine monoton wachsende Folge mit $\lim_{n\to\infty}]-\infty, c_n]\times]-\infty, d_n] = \mathbb{R}^2$.
Somit ist wegen der Stetigkeit von $\mathbb{P}$ der Limes $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(c_n, d_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X \leq c_n \text{ und } Y \leq d_n\right) = \mathbb{P}\left(\mathbb{R}^2\right) = 1$.

Eigenschaften

(b) Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ gilt: $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a_n, b_n) = 1$.
Beweis: Betrachte $c_n := \inf_{k\geq n} a_n$ und $d_n := \inf_{k\geq n} b_n$. Es gilt offensichtlich, dass $V_{X,Y}(c_n, d_n) \leq V_{X,Y}(a_n, b_n)$.
Es reicht also zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(c_n, d_n) = 1$.
Die Folgen c_n und d_n sind monoton wachsend und ergeben im Limes ∞.
Daher ist die Folge der Ereignisse "$X \leq c_n$ und $Y \leq d_n$" eine monoton wachsende Folge mit $\lim_{n\to\infty}]-\infty, c_n] \times]-\infty, d_n] = \mathbb{R}^2$.
Somit ist wegen der Stetigkeit von $\mathbb{P}$ der Limes
$\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(c_n, d_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X \leq c_n \text{ und } Y \leq d_n\right) = \mathbb{P}\left(\mathbb{R}^2\right) = 1$.

Eigenschaften

(c)Stetigkeit von rechts-oben: Für jede Folge $(s_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{n\to\infty}(s_n, t_n) = 0$ und für jedes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a + s_n, b + t_n) = V_{X,Y}(a, b) .$$

Beweis: Wie bei der einfachen Verteilungsfunktion können wir uns o.B.d.A auf monoton fallende s_n und t_n einschränken.
Es ist dann $X \leq a + s_n$ und $Y \leq b + t_n$ eine fallende Folge von Ereignissen.
Somit ist
$\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a + s_n, b + t_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \leq a + s_n \text{ und } Y \leq b + t_n\right) = \mathbb{P}\left(X \leq a \text{ und } Y \leq b\right) = V_{X,Y}(a, b)$.

Eigenschaften

(c)Stetigkeit von rechts-oben: Für jede Folge $(s_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{n\to\infty}(s_n, t_n) = 0$ und für jedes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a + s_n, b + t_n) = V_{X,Y}(a, b) .$$

Beweis: Wie bei der einfachen Verteilungsfunktion können wir uns o.B.d.A auf monoton fallende s_n und t_n einschränken.
Es ist dann $X \leq a + s_n$ und $Y \leq b + t_n$ eine fallende Folge von Ereignissen.
Somit ist
$\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a + s_n, b + t_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \leq a + s_n \text{ und } Y \leq b + t_n\right) = \mathbb{P}\left(X \leq a \text{ und } Y \leq b\right) = V_{X,Y}(a, b)$.

Eigenschaften

(c)Stetigkeit von rechts-oben: Für jede Folge $(s_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{n\to\infty}(s_n, t_n) = 0$ und für jedes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a + s_n, b + t_n) = V_{X,Y}(a, b) \ .$$

Beweis: Wie bei der einfachen Verteilungsfunktion können wir uns o.B.d.A auf monoton fallende s_n und t_n einschränken.
Es ist dann $X \leq a + s_n$ und $Y \leq b + t_n$ eine fallende Folge von Ereignissen.
Somit ist
$\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a + s_n, b + t_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \leq a + s_n \text{ und } Y \leq b + t_n\right) = \mathbb{P}\left(X \leq a \text{ und } Y \leq b\right) = V_{X,Y}(a, b)$.

Eigenschaften

(c)Stetigkeit von rechts-oben: Für jede Folge $(s_n, t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{n\to\infty}(s_n, t_n) = 0$ und für jedes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a + s_n, b + t_n) = V_{X,Y}(a, b) \; .$$

Beweis: Wie bei der einfachen Verteilungsfunktion können wir uns o.B.d.A auf monoton fallende s_n und t_n einschränken.
Es ist dann $X \leq a + s_n$ und $Y \leq b + t_n$ eine fallende Folge von Ereignissen.
Somit ist
$\lim_{n\to\infty} V_{X,Y}(a + s_n, b + t_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \leq a + s_n \text{ und } Y \leq b + t_n\right) = \mathbb{P}\left(X \leq a \text{ und } Y \leq b\right) = V_{X,Y}(a, b)$.