Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2024

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Klausur am 30.07.2024

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.**

Es sind maximal 99 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+10 = 14 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{2x-1}{(x^2-1)x^2}\,\mathrm{d}x$ HINWEIS: Partialbruchzerlegung

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y' + 2x\mathrm{e}^{-x^2}(1+y^2) = 0,\ \ y(0) = 0.$

Aufgabe 3 (4+2+4 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ von $y'' + 2y' + y = 0$.
b) Lösen Sie das AWP $y'' + 2y' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.
c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 2y' + y = \sin x$.

Aufgabe 4 (10+2 = 12 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
b) Führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = U^T AU$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Die 3×3-Matrix A habe den Eigenwert 3 mit zugehörigem Eigenvektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und jeder Vektor senkrecht zu $\vec{u}$ sei Eigenvektor zum Eigenwert 1. Bestimmen Sie A.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Bringen Sie die quadratische Form in

$$3x^2 + 8xy - 3y^2 = 1$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und zeichnen Sie ihn in einem xy-Koordinatensystem.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x, y) = 1 + y^2 + \cos x\,,$$

d.h. alle (x, y) mit $(\nabla f)(x, y) = 0$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen, und berechnen Sie die zugehörigen Funktionswerte.

Aufgabe 8 (4+6+2+5 = 17 Punkte)

Die Kurve

$$\mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\ \cos t \\ r(t)\ \sin t \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad r(t) = 1 + a\cos t\,, \quad t \in [0, 2\pi),$$

und mit festem $a \in (0, 1)$ heißt Pascalsche Schnecke.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Pascalschen Schnecke mit den Koordinatenachsen.

b) Berechnen Sie den Inhalt der von der Pascalschen Schnecke eingeschlossenen Fläche.
Hinweis: Polarkoordinaten sind hilfreich.

c) Sei $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -y^2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$.

d) Sei $\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{g}\,\mathrm{d}\vec{x}$.

Hinweis: Sie dürfen $\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \pi$ verwenden.

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Berechnen Sie $\int_{\mathcal{F}} \mathrm{d}O$, wobei

$$\mathcal{F} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} (2 + \sin u)\cos v \\ (2 + \sin u)\sin v \\ \cos u \end{pmatrix}\ ,\ 0 \le u < 2\pi\ ,\ 0 \le v < 2\pi \right\}.$$