Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2024

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Material anstatt der Vorlesung am 01.07.24

Umkehrfunktionen (knüpft an Abschnitt 11.7 an)

Wenn wir die Umkehrfunktion von $f : U \to V$ (mit $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$) suchen, d.h. $f^{-1} : V \to U$ mit $f^{-1}\big(f(\vec{x})\big) = \vec{x}\ \forall\, \vec{x} \in U$ und $f\big(f^{-1}(\vec{x})\big) = \vec{x}\ \forall\, \vec{x} \in V$, dann müssen wir $f(\vec{x}) = \vec{y}$ nach $\vec{x}$ auflösen. Das geht (lokal) im Prinzip, wenn $\det f' \neq 0$.

Warum? https://youtu.be/HSqC4gBI8V0 (3 min) (1)

Es gilt dann

$$f^{-1\prime}(\vec{x}) = \left[f'\big(f^{-1}(\vec{x})\big)\right]^{-1}. \tag{2}$$

Warum? https://youtu.be/-QN9G63JYmY (3 min)

Beispiel: Für welche (r, ϕ) ist

$$\begin{gathered} f : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \text{ mit} \\ f(r,\phi) = \begin{pmatrix} x(r,\phi) \\ y(r,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{3}$$

(lokal) umkehrbar, definiert also eine Funktion f^{-1}, die r und ϕ als Funktionen von x und y ausdrückt? Berechne außerdem $f^{-1\prime}(-3, 0)$.

https://youtu.be/FpwUKocFPs0 (6 min) (4)

Untersuchen Sie analog

$$\begin{gathered} f : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \text{ mit} \\ f(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(u)\cos(v) \\ \sinh(u)\sin(v) \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{5}$$

auf lokale Umkehrbarkeit. HINWEISE: $\sinh' = \cosh$, $\cosh' = \sinh$, $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$.

11.8 Extrema unter Nebenbedingungen

Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g_1, \dots, g_m$ jeweils $M \to \mathbb{R}$. $\vec{x}_0 \in M$ heißt lokale Maximalstelle von f unter den Nebenbedingungen $g_j = 0$, $j = 1, \dots, m$, falls

(i) $g_j(\vec{x}_0) = 0\ \forall\ j = 1, \dots, m$ und

(ii) es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass
$f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)\ \forall\ \vec{x} \neq \vec{x}_0$ mit $|\vec{x} - \vec{x}_0| < \varepsilon$ und $g_j(\vec{x}) = 0\ \forall\ j = 1, \dots, m$.

(analog: Minimalstelle)

Beispiel: (n=2, m=1) Suche Extremstellen von

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x-5)^2-(y-4)^2} \tag{6}$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$, d.h. $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Auflösen oder Parametrisieren? https://youtu.be/eNp8kaZC5Vs (6 min) (7)

Noch besser: Suche kritische Punkte der Funktion $L(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) + \lambda g(\vec{x})$.

Was soll das bringen? https://youtu.be/3iCBJqrbL8k (7 min) (8)

Das gilt sogar sogar viel allgemeiner...

Satz. (Lagrange-Multiplikatoren)
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g_1, \ldots, g_m \in C^1(M)$ skalare Funktionen mit $m < n$. Ist $\vec{x}_0 \in M$ ein lokales Extremum von f unter den Nebenbedingungen $g_j = 0$, $j = 1, \ldots, m$, und sind $(\nabla g_1)(\vec{x}_0), \ldots, (\nabla g_m)(\vec{x}_0)$ linear unabhängig, so gibt es sogenannte Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ für die gilt: Definieren wir (die Lagrange-Funktion)

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) := f(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\vec{x}) \tag{9}$$

dann gibt es ein $\vec{\lambda}_0 \in \mathbb{R}^m$, so dass

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) = 0 \qquad \textit{und} \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) = 0 \quad \forall\ j = 1, \ldots, m\,. \tag{10}$$

Kurz: Kritische Punkte von L liefern mögliche Extremstellen von f unter den NBen g_j.

Beispiele: Zunächst lösen wir das Eingangsproblem:

https://youtu.be/2YyQa-WSzew (10 min) (11)

Probieren Sie's nun selbst für

$$f(x, y) = (x - y)^2 \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad x^2 + y^2 = 1\,. \tag{12}$$

Optional: Wenn Sie wissen möchten, warum das – wie im Satz formuliert – auch für mehr Variablen und unterschiedliche Anzahl von Nebenbedingungen klappt, dann schauen Sie sich noch die folgenden Erklärungen an:

https://youtu.be/fnbqu4ilNZQ (7 min) (13)