Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2024

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 11 (Abgabe spätestens 11.07.2024, 10:00)

Aufgabe 44 (10 Punkte)
Für welche $(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ ist die Funktion

$$f(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \vartheta, \varphi) \\ y(r, \vartheta, \varphi) \\ z(r, \vartheta, \varphi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

lokal umkehrbar?[1] Berechnen Sie auch ${f^{-1}}'(0, 2, 0)$; geben Sie an, welchen Zweig Sie dabei gewählt haben (d.h. aus welchem Bereich bei Ihnen r, ϑ und φ stammen).

Aufgabe 45 (15 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2 - y^2 + 2x - 2y}$.

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f.
b) Bestimmen Sie alle potentiellen Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4$. Entscheiden Sie, ob es sich tatsächlich um Minima oder Maxima handelt.
c) Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\}$. Bestimmen Sie $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x, y)$ und $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x, y)$.

Hinweis: Denken Sie neben Satz 36 (Lagrange-Multiplikatoren) auch an Satz 27 (Min/Max stetiger Funktionen auf Kompaktum).

Aufgabe 46 (10 Zusatzpunkte)
Bestimmen Sie die Masse m des inhomogenen Einheitswürfels $W = [0, 1]^3$ mit Dichte

$$f(x, y, z) = x^2 z\, \mathrm{e}^{xyz} + y\, \mathrm{e}^{xy}\,,$$

d.h. berechnen Sie $m = \int_W f \, \mathrm{d}V$.

Aufgabe 47 (Zylinderkoordinaten) (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Volumenelement $\mathrm{d}V$ in Zylinderkoordinaten (r, φ, z), definiert durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos\varphi \\ r \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad (x, y, z: \text{ kartesisch})\,,$$

b) Bestimmen Sie das Volumen des Paraboloids

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x^2 + y^2 \leq 9 - z \\ 0 \leq z \leq 9 \end{matrix} \right\},$$

und zeichnen Sie P.

---

[1] Das heißt wo existiert eine Funktion $f^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} r(x, y, z) \\ \vartheta(x, y, z) \\ \varphi(x, y, z) \end{pmatrix}$?

Aufgabe 48 (Wiederholung: Summen, Reihen, Integrale)[2] (20 Zusatzpunkte)
Sei (für $p, \lambda, \sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$)

$$b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,, \qquad P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,, \qquad f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b(k; n, p)\,, \qquad \sum_{k=0}^{n} k\, b(k; n, p)\,, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2\, b(k; n, p)\,,$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(k; \lambda)\,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(k; \lambda)\,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k^2\, P(k; \lambda)\,,$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\sigma^2}(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{\mu,\sigma^2}(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_{\mu,\sigma^2}(x)\,\mathrm{d}x\,,$

HINWEIS: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,,$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu_1,\sigma_1^2}(y)\, f_{\mu_2,\sigma_2^2}(x-y)\,\mathrm{d}y\,,$ ERGEBNIS: $f_{\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2}(x)\,.$

Aufgabe 49 (14 Zusatzpunkte)
Üben Sie bis spätestens 21.07.24 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Basic set notation*,
- *Subsets of sample spaces*,
- *Simple probability*,
- *Probabilities of compound events*,
- *Independent probability*,
- *Dependent probability* und
- *Simple hypothesis testing.*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 5 (Blatt 1).

[2] Diese Aufgabe wird nicht in den Übungen besprochen. Wir helfen aber gerne bei der Bearbeitung, wenn Sie z.B. Fragen oder Lösungsansätze auf Discord posten.