Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2024

# Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 10 (Abgabe spätestens 04.07.2024, 10:00)

---

**Aufgabe 39** (8+7 = 15 Punkte)
Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktionen

$$f(x,y) = (2x-y)^4 - 7(4x^2+y^2) + 36xy \qquad \text{und} \qquad g(x,y) = x^2 - x^4 - \cos(y)\,,$$

d.h. alle Punkte mit $\nabla f = 0$ (bzw. $\nabla g = 0$). Untersuchen Sie, ob dort Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

**Aufgabe 40** (5 Zusatzpunkte)
Ist $y + xy^2 + \cos(xy) = 0$ in einer Umgebung von $(x_0, y_0)$ mit $x_0 = 0$ und geeignetem $y_0$ nach $y = f(x)$ auflösbar? Berechnen Sie ggf. auch $f'(0)$.

**Aufgabe 41** (10 Punkte)
Zeigen Sie, dass sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 + \cos(y_1 y_2) &= y_2 x_1 + 1 \\ \sin y_1 &= x_2 + y_2 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, -1, 0, 1)$ nach $\vec{y} = f(\vec{x})$, d.h.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}\,,$$

auflösen lässt, und berechnen Sie $f'(0, -1)$.

**Aufgabe 42** (10 Zusatzpunkte)
Für Umgebungen welcher Punkte $(x_0, y_0)$ lässt sich die Gleichung

$$x^2 = y^2 + y^3$$

jeweils lokal nach $y$ auflösen? Und wo lässt sie sich lokal nach $x$ auflösen? Illustrieren Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll in einem Diagramm.

**Aufgabe 43 (Fortsetzung von Aufgabe 16)** (12 Zusatzpunkte)

Die Lösung von Aufgabe 16c war ein DGL-System der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{s}(t) \\ \dot{c}(t) \end{pmatrix} = f\big(s(t), c(t)\big)$$

mit einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

a) Wählen Sie positive Parameter $k_1, k_2, k_3$ und $e_0$. Visualisieren Sie die Funktion $f$, indem Sie in der $sc$-Ebene an Punkten mit den Koordinaten $(s, c)$ Pfeilchen $f(s, c)$ einzeichnen. Wählen Sie den Bereich in der $sc$-Ebene sinnvoll. Wählen Sie die absolute Länge der Pfeile beliebig aber sinnvoll, die relative Länge der Pfeile muss stimmen.
Hinweis: Sie dürfen zum Zeichnen auch einen Computer verwenden. Tippen Sie z.B. auf `www.wolframalpha.com` den Ausdruck `vector field plot` ein: Sie sehen dann genau so eine Visualisierung einer (anderen) Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, und es wird Ihnen ein Formular angezeigt, in dem Sie die Funktion und den Plot-Bereich eingeben können.

Lösungen des DGL-Systems entsprechen Kurven in der $sc$-Ebene, deren Tangentialvektoren ("Geschwindigkeitsvektoren") an jeder Stelle durch die Pfeilchen des Plots aus Teil a gegeben sind. (Warum?)

b) Zeichnen Sie zwei oder drei Lösungen des DGL-Systems für Anfangsbedingungen der Form $\big(s(0), c(0)\big) = (s_0, 0)$, mit $s_0 > 0$, in Ihr(e) Diagramm(e) aus Teil a ein. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus Aufgabe 16f.

Es gilt $f(0,0) = \binom{0}{0}$, d.h. $\big(s(t), c(t)\big) = (0,0)\ \forall t$ ist eine Lösung des DGL-Systems.[1] Für kleine $s$ und $c$ approximieren wir das DGL-System durch das lineare DGL-System (warum?)

$$\begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{c} \end{pmatrix} = f'(0,0) \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} .$$

c) Bestimmen Sie $f'(s, c)$.
d) Untersuchen Sie $f'(0, 0)$ auf Definitheit.
e) Wie sehen verschiedene Lösungen des linearen DGL-Systems (qualitativ) aus?
Hinweis: Denken Sie dabei v.a. an Aufgabe 25a.
f) Wo und wie manifestiert sich das Verhalten aus Teil e in dem/den Plot(s) aus Teil a?

[1] Wir nennen daher $(0, 0)$ einen Fixpunkt des DGL-Systems.