

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 9 (Abgabe spätestens 27.06.2024, 10:00)

Aufgabe 35

(10 Punkte)

Berechnen Sie $\int_{\mathfrak{K}_j} \vec{f} d\vec{x}$, $j = 1, 2, 3$, für $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ und die Wege

a) $\mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$,

b) $\mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und

c) \mathfrak{K}_3 : Die geradlinige Verbindung von $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Geben Sie auch jeweils den Anfangs- und den Endpunkt des Integrationswegs an.
Ist \vec{f} konservativ, d.h. gibt es ein $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\vec{f} = \nabla F$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 36

(10 Zusatzpunkte)

Bestimmen Sie $\int_{\mathfrak{K}_j} \vec{f} d\vec{x}$, $j = 1, 2$, für

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} ze^{xz} - 2x \cos(x^2 + y^2) \\ e^{-y^2} - 2y \cos(x^2 + y^2) \\ xe^{xz} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$\text{sowie} \quad \mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ \log(1 + 24t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Zeichnen Sie außerdem die Kurven \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 .

Aufgabe 37

(3+4+3= 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x, y, z) = \frac{e^{xy}}{1 - yz}$ um $(0, 0, 0)$.

b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklungen im Ursprung bis einschließlich des quadratischen Terms von $f(x, y, z) = \sin(xy) - \cos(z) + xz(y-1)^{24}$ und $g(x, y) = \sin(x+y)$ und

c) Bestimmen Sie die Taylorreihe um den Punkt $(1, 0, -1)$ von

$$f(x, y, z) = x^3 - 3x^2 + y^2 + 4yz + 2z + 3x + 24.$$

HINWEIS: Sie müssen nicht ableiten.

Aufgabe 38

(15 Punkte)

Wenn wir $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$ als vektorwertigen Differentialoperator betrachten, können wir auch Skalarprodukte und, im \mathbb{R}^3 , das Kreuzprodukt bilden.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für $\vec{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto (f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))^T$ definieren wir

$$\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \quad (\text{Divergenz})$$

$$\text{und speziell für } n = 3 \quad \operatorname{rot} \vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (\text{Rotation}).$$

Im Fall $n = 3$ schreiben wir statt x_1, x_2, x_3 auch gerne x, y, z .

Berechnen Sie (wo möglich) $\operatorname{div} \vec{f}$, $\operatorname{rot} \vec{f}$, $\operatorname{grad} V$, $\operatorname{div} \operatorname{grad} V$ und $\operatorname{rot} \operatorname{grad} V$ für

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z + y \cos z \\ x + y \\ y \sin(xz) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$