Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 8 (Abgabe spätestens 20.06.2024, 10:00)

Bemerkung zur Notation: Statt $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ schreiben wir auch f_x.

Aufgabe 31 (6+6+6 = 18 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & \pi & 5 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Seien weiter $f, q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) = \mathrm{e}^{xyz} + (x-y)\sin(z)$ und $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$.

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_x, f_y und f_z.
b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen q_x, q_y und q_z.
c) Berechnen Sie Richtungsableitung von q an der Stelle $\vec{x}_0 = (1\ 0\ 1)^T$ in Richtung von $\vec{v} = (0\ 1\ 0)^T$. Verwenden Sie dabei kein ∇, sondern die Definition der Richtungsableitung!
HINWEIS: Es lohnt sich, zu überlegen, wie $\big(\partial q/\partial \vec{v}\big)(\vec{x}_0)$ für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine beliebige Richtung $\vec{v}$ an einer beliebigen Stelle $\vec{x}_0$ aussieht.

Aufgabe 32 (2+3 = 5 Punkte)
Wir betrachten nochmal die Funktionen f und q aus Aufgabe 31.

a) Für welche $\vec{x}$ sind f und q total differenzierbar? Geben Sie dort ∇f und ∇q an.
b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{x}_0 = (1, 1, \pi)^T$ in Richtung von $(1, 1, 1)^T$.

Aufgabe 33 (5 Zusatzpunkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \quad 1 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Wo ist f stetig, wo nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 34 (4+4+4 = 12 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^3 + y^6} & , \quad x^2 + y^2 > 0 \\ \quad 0 & , \quad x = y = 0 \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie: Die Funktion $g : y \mapsto f(x_0, y)$ für beliebiges aber festes $x_0 \in \mathbb{R}_0^+$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.
b) Berechnen Sie alle Richtungsableitungen von f in $\vec{0}$.
c) Ist f in $\vec{0}$ total diffbar? Begründen Sie Ihre Antwort.