Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2024

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 7 (Abgabe spätestens 13.06.2024, 10:00)

Aufgabe 28 (20 Punkte)
Bringen Sie die quadratischen Formen in den folgenden Gleichungen auf Hauptachsen, geben Sie an, was für Kegelschnitte die Gleichungen beschreiben, und zeichnen Sie sie.

a) $6x^2 - 4xy + 9y^2 = 1$

b) $2y^2 - 7x^2 + 12xy = 1$

c) $3x^2 + 8xy - 3y^2 = 5$

d) $12x^2 + 36xy + 27y^2 = \frac{1}{3}$

Aufgabe 29 (8+3+5 = 16 Punkte)
Gegeben sei die quadratische Form

$$q_A(\vec{x}) = x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2ax_2x_3\,, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) Für welche Werte von a ist q_A positiv definit? Welche Definitheitseigenschaften hat q_A für andere Werte von a?

b) Für welchen Wert von a ist $\vec{v} = (1,0,1)^T$ eine Hauptachsenrichtung von q_A (d.h. ein Eigenvektor von A)?

c) Bestimmen Sie für den a-Wert aus (b) die Hauptachsenform für q_A, d.h. bestimmen Sie eine Koordinatentransformation $\vec{y} = U^T\vec{x}$, U orthogonal, und eine Diagonalform q_D mit $q_A(\vec{x}) = q_D(\vec{y})$.

Aufgabe 30 (5+3+2 = 10 Zusatzpunkte)
Sei $\vec{x} = (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten x, y, z. Wir möchten uns die folgende Menge veranschaulichen,

$$T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = \tfrac{1}{4} \right\}.$$

a) Zeichnen Sie zunächst die Schnittmengen mit den drei Koordinatenebenen, z.B. ist $T_{xy} = \{\vec{x} \in T \mid z = 0\}$ die Schnittmenge mit der xy-Ebene.

b) Zeichnen Sie nun $T \subset \mathbb{R}^3$.

c) Erklären Sie kurz, wie Sie von den Ergebnissen in (a) zu der Zeichnung in (b) gelangt sind.

Hinweis: Wenn Sie in (a) die Gleichung, die ein Punkt erfüllen muss, damit er sowohl in T als auch in einer Koordinatenebene liegt, etwas umstellen, kommen stets Kreise zum Vorschein.