Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2024

Mathematik 2 für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 6 (Abgabe spätestens 06.06.2024, 10:00)

Aufgabe 22 (14 Punkte)
Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen ($\phi \in \mathbb{R}$) alle Eigenwerte und alle zugehörigen Eigenvektoren,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad C_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 23 (3 Punkte)
Führen Sie für die Matrix A aus Aufgabe 22 die HAT durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix U mit zugehöriger Diagonalmatrix $D = \overline{U}^T A U$ an.

Aufgabe 24 (10 Zusatzpunkte)
Berechnen Sie e^{iBx} für die Matrix B aus Aufgabe 22, wobei $x \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Diagonalisieren Sie dazu die Matrix B. Wenn Sie irgendwo steckenbleiben, dann können Sie hier nachschauen: https://youtu.be/GkyDmVo_TY4.

Aufgabe 25 (3+3+4 = 10 Punkte)
Wir nennen

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}\,, \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n}\,,$$

ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordung mit konstanten Koeffizienten. Dabei sind die Elemente von $\vec{y}$ Funktionen von x, und $\vec{y}\,'$ ist die komponentenweise Ableitung nach x, d.h.

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

a) Rechnen Sie nach: Ist λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{u}$, so ist

$$\vec{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\,\vec{u}$$

eine Lösung des DGL-Systems.

b) Zeigen Sie: Jedes $\vec{y}$ der Form

$$\vec{y}(x) = \mathrm{e}^{Ax}\,\vec{b}\,, \quad \vec{b} \in \mathbb{C}^n \text{ beliebig,}$$

ist eine Lösung des DGL-Systems. Welchen Wert nimmt $\vec{y}(0)$ an?

c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, mit A aus Aufgabe 22.

Aufgabe 26 (6 Zusatzpunkte)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Zeigen Sie: $\det A = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j$.

Ist die Determinante auch für nicht-hermitesche Matrizen gleich dem Produkt der Eigenwerte? Falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an. Falls ja, beweisen Sie die Aussage.

Aufgabe 27 (6+4 = 10 Punkte)

Funktionen von zwei Variablen können wir auf verschiedene Arten visualisieren, z.B. durch das Zeichnen von Höhenlinien oder als perspektivische Zeichnung des Graphs der Funktion.

Wir betrachen die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 \quad \text{und} \quad g(x, y) = y^2 - x^2\,.$$

a) Visualisieren Sie die Funktionen mittels Höhenlinien, d.h. zeichnen Sie z.B. in einem Diagramm $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = 1$ sowie $f(x, y) = 4$ und in einem anderen Diagramm $g(x, y) = 0$, $g(x, y) = 1$ und $g(x, y) = -1$. Denken Sie dabei an die Ellipsen und Hyperbeln aus der Vorlesung vom 27.05.24 oder aus den Aufgaben 9 & 14.

b) Fertigen Sie nun auch perspektivische Skizzen der Graphen der beiden Funktionen an, entweder mit Stift und Papier oder mithilfe eines Computers, vgl. z.B. https://www.wolframalpha.com/input?i=2x%5E2-x%5E4-y%5E2.

Machen Sie sich auch den Zusammenhang zwischen den beiden Darstellungen klar.