Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
David Seez

SS 2024
17.07.2024
Blatt 13

Übungen zu „Algebraische Topologie II“

Aufgabe 45. Zeigen Sie:

(a) Sind A und B endlich erzeugte ablesche Gruppen, so gilt:

$$\mathrm{Tor}(A, B) \cong \mathrm{Tor}(\mathrm{Tor}A, \mathrm{Tor}B)$$

(b) Für allem $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_{\mathrm{ggT}(m,n)}$$

Aufgabe 46. Zeigen Sie, dass die Homomorphismen λ und μ aus dem universellen Koeffiziententheorem natürliche Transformationen von $F_1 := H_k(\cdot) \otimes G$ nach $F_2 := H_k(\cdot; G)$ bzw. von $G_1 := F_2$ nach $G_2 := \mathrm{Tor}(H_{k-1}(\cdot); G)$ (für alle $k \in \mathbb{N}_0$)) sind.

Aufgabe 47. Zeigen Sie: Ist C ein freier Kettenkomplex und $k \in \mathbb{Z}$, so gilt:

(a) Ist $H_k(C)$ endlich erzeugt, und $H_k(C; \mathbb{Z}_p) = 0$, für alle Primzahlen p, so ist $H_k(C) = 0$.

(b) Ist $H_{k-1}(C)$ frei, so ist $\lambda\colon H_k(C) \otimes G \to H_k(C; G)$ ein Isomorphismus, für alle abelschen Gruppen G.

(c) Ist $H_{k-1}(C)$ endlich erzeugt, so ist $\lambda\colon H_k(C) \otimes \mathbb{R} \to H_k(C; \mathbb{R})$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 48. Gegeben sei *eine Homologietheorie* (H, ∂) *auf* $\mathbf{Top}_2$ *mit kompakten Trägern*, d.h.: für jedes Raumpaar (X, A), $k \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in H_k(X, A)$ existiert ein *kompaktes Paar* $(K, L)) \subseteq (X, A)$, so dass α im Bild von $H_k(K, L) \to H_k(X, A)$ liegt. Sei nun X ein topologischer Raum und für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ weiter $X^k \subseteq X$ derart, dass folgendes gilt:

(i) $X^k \subseteq X^{k+1}$, für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $X = \bigcup_k X^k$;

(ii) für jedes Kompaktum $K \subseteq X$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq X^n$;

(iii) $H_l(X^k, X^{k-1}) = 0$, für alle $l \neq k$.

Definieren wir dann einen Kettenkomplex $C = (C_k, \partial_k)_k$ durch $C_k := H_k(X^k, X^{k-1})$ und ∂_k dem verbindenden Homomorphismus in der Tripelsequenz von (X^k, X^{k-1}, X^{k-2}) (vgl. Aufgabe 40, Blatt 11), so zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}_0$:

$$H_k(C) \cong H_k(X).$$

Abgabe: Dienstag, den 23.07.2024 bis 18 Uhr via „urm“