Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
David Seez

SS 2024
10.07.2024
Blatt 12

Übungen zu „Algebraische Topologie II“

Aufgabe 41. Seien A und B abelsche Gruppen.

(a) Zeigen Sie, dass es für zwei Tensorprodukte (T_1, t_1) und (T_2, t_2) von A und B genau einen Isomorphismus $\Phi\colon T_1 \to T_2$ gibt mit $\Phi \circ t_1 = t_2$.

(b) Sei $(A \otimes B, \otimes)$ Tensorprodukt von A und B sowie C eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass die Zuordnung

$$\Phi\colon \mathrm{Hom}(A \otimes B, C) \to \mathrm{Bil}(A \times B, C), \quad f \mapsto f \circ \otimes$$

ein Isomorphismus zwischen abelschen Gruppen ist.

Aufgabe 42. Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{Z}^m \otimes \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^{mn}$ (Hinweis: Ist $(e_j^{(n)})_{j=1,\dots,n}$ die kanonische Basis von $\mathbb{Z}^n$, so zeige man, dass $(e_i^{(m)} \otimes e_j^{(n)})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,n}$ Basis von $\mathbb{Z}^m \otimes \mathbb{Z}^n$ ist.)

(b) $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{\mathrm{ggT}(m,n)}$

Aufgabe 43. Seien A und B abelsche Gruppen und $(A \otimes B, \otimes)$ ihr Tensorprodukt.

(a) Zeigen Sie für alle $a \in A$, $b \in B$ und $n \in \mathbb{Z}$:

$$a \otimes (nb) = (na) \otimes b = n(a \otimes b)$$

(b) Ein Element $t \in A \otimes B$ heißt *zerlegbar*, wenn es im Bild von $\otimes$ liegt. Zeigen Sie am Beispiel von $A = B = \mathbb{Z}^2$, der kanonischen Basis (e_1, e_2) von $\mathbb{Z}^2$ und dem Tensor $t = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$, dass i.a. nicht jedes Element in $A \otimes B$ zerlegbar ist.

Aufgabe 44. Sei (H, ∂) eine Homologie-Theorie auf $\mathbf{Top}_2$ (vgl. die Definition auf Blatt 11), X ein topologischer Raum sowie $A_1, A_2 \subseteq X$ Teilräume mit $A_1 \cup A_2 = X$. Zeigen Sie:

(a) Induziert die *Ausschneidungsinklusion* $(A_1, A_1 \cap A_2) \hookrightarrow (X, A_2)$ einen Isomorphismus in der Homologie, so auch die Ausschneidungsinklusion $(A_2, A_1 \cap A_2) \hookrightarrow (X, A_1)$.

(b) Unter den Voraussetzungen von (a) liefern die Inklusionen $i_s\colon (A_s, A_1 \cap A_2) \hookrightarrow (X, A_1 \cap A_2)$ $(s = 1, 2)$ einen Isomorphismus (für alle $k \in \mathbb{N}_0$)

$$H_k(A_1, A_1 \cap A_2) \oplus H_k(A_2, A_1 \cap A_2) \longrightarrow H_k(X, A_1 \cap A_2)$$

vermöge $(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto (i_1)_*(\alpha_1) + (i_2)_*(\alpha_2)$.

(c) Seien nun $j_s\colon A_1 \cap A_2 \hookrightarrow A_s$, $i_s\colon A_s \hookrightarrow X$ $(s = 1, 2)$ und $\iota\colon X \hookrightarrow (X, A_1 \cap A_2)$ die Inklusionen sowie (für alle $k \in \mathbb{N}_0$)

$$\begin{aligned} \varphi_k(\alpha) &= ((j_1)_*(\alpha), -(j_2)_*(\alpha)), \\ \psi_k(\alpha_1, \alpha_2) &= (i_1)_*(\alpha_1) + (i_2)_*(\alpha_2), \\ \Delta_k &= \partial_k(X, A_1 \cap A_2) \circ \iota_*. \end{aligned}$$

Zeigen Sie dann, dass unter der Voraussetzung von (a) die folgende *Mayer-Vietoris-Sequenz* abelscher Gruppen exakt ist:

$$\cdots \longrightarrow H_k(A_1 \cap A_2) \xrightarrow{\varphi_k} H_k(A_1) \oplus H_k(A_2) \xrightarrow{\psi_k} H_k(X) \xrightarrow{\Delta_k} H_{k-1}(A_1 \cap A_2) \longrightarrow \cdots$$

Abgabe: Dienstag, den 16.07.2024 bis 18 Uhr via „urm“