Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
David Seez

SS 2024
03.07.2024
Blatt 11

Übungen zu „Algebraische Topologie II“

Aufgabe 38. Sei $\mathcal{C}_1 = \mathbf{CW}$ die Kategorie der CW-Komplexe, $\mathcal{C}_2 = \mathbf{Ab}$ die Kategorie der abelschen Gruppen und $k \in \mathbb{N}_0$. Wir betrachten die Funktoren $F_1, F_2 \colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$, die auf den Objekten durch

$$\begin{aligned} F_1(X) &= H_k(X) \text{ (singuläre Homologie)} \\ F_2(X) &= H_k(C(X)) \text{ (zelluläre Homologie)} \end{aligned}$$

und auf den Morphismen dann naheliegend gegeben sind. Zeigen Sie dass der Isomorphismus $\Phi_k(X) \colon H_k(X) \to H_k(C(X))$ aus der Vorlesung $\Phi_k \colon X \to \Phi_k(X)$ zu einer natürlichen Transformation, also zu einem *natürlichen Isomorphismus*, von F_1 nach F_2 macht.

Aufgabe 39. Zeigen Sie: Ist X ein kompakter CW-Raum, so sind nur endlich-viele seiner Homologiegruppen nicht-trivial und diese sind allesamt endlich erzeugt.

Definition. Eine *(axiomatische) Homologietheorie auf der Kategorie der topologischen Paare* $\mathbf{Top}_2$ (oder einer Unterkategorie von $\mathbf{Top}_2$) (H, ∂) besteht aus einer Familie $H = (H_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ von Funktoren $H_k \colon \mathbf{Top}_2 \to \mathbf{Ab}$ und aus einer Familie $\partial = (\partial_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von natürlichen Transformationen ∂_k von H_k nach $F_k \colon \mathbf{Top}_2 \to \mathbf{Ab}$, gegeben durch

$$F_k(X, A) = H_{k-1}(A) := H_{k-1}(A, \emptyset))$$

$$F_k(f \colon (X, A) \to (Y, B)) = H_{k-1}(f|A) \colon H_{k-1}(A) \to H_{k-1}(B),$$

so dass gilt:

(a) (Homotopieaxiom) Sind $f, g \colon (X, A) \to (Y, B)$ homotop, so ist $H_k(f) = H_k(g) \colon H_k(X, A) \to H_k(Y, B)$, für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) (Exaktheitsaxiom) Ist (X, A) ein Raumpaar und sind $i \colon A \hookrightarrow X$ und $j \colon X \hookrightarrow (X, A)$ die Inklusionen, so ist folgende lange Sequenz abelscher Gruppen exakt:

$$\cdots \longrightarrow H_k(A) \xrightarrow{H_k(i)} H_k(X) \xrightarrow{H_k(j)} H_k(X, A) \xrightarrow{\partial_k(X,A)} H_{k-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

(c) (Ausschneidungsaxiom) Ist (X, A) ein Raumpaar und ist $U \subseteq A$ mit $\bar{U} \subseteq \operatorname{int}(A)$, so induziert die Inklusion $i \colon (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ einen Isomorphismus in der Homologie,

$$H_k(i) \colon H_k(X \setminus U), A \setminus U) \xrightarrow{\cong} H_k(X, A), \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

(d) (Dimensionsaxiom) Für den einpunktigen Raum pt gilt: $H_0(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}$ und $H_k(\mathrm{pt}) = 0$ für $k > 0$.

Aufgabe 40 (Die lange Tripel-Sequenz). Seien (X, A, B) ein Raumtripel, $i\colon (A, B) \hookrightarrow (X, B)$, $j\colon (X, B) \hookrightarrow (X, A)$, $k\colon A \hookrightarrow (A, B)$ die Inklusionen und (H, ∂) eine Homologietheorie auf $\mathbf{Top}_2$. Zeigen Sie, dass dann die folgende lange Sequenz abelscher Gruppen (Tripelsequenz) exakt ist:

$$\cdots \longrightarrow H_n(A, B) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X, B) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{H_{n-1}(k)\circ\partial_n(X,A)} H_{n-1}(A, B) \longrightarrow \cdots$$

Abgabe: Dienstag, den 09.07.2024 bis 18 Uhr via „urm“