Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
David Seez

SS 2024
26.06.2024
Blatt 10

Übungen zu „Algebraische Topologie II“

Aufgabe 34. Sei X ein (nicht-leerer) CW-Raum und $\mathcal{Z}$ eine Zellzerlegung für X.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{Z}$ zumindest eine 0-Zelle hat. (Hinweis: Jede Zelle besitzt eine charakteristische Abbildung.)

(b) Zeigen Sie: Ist $K \subseteq X$ kompakt, so trifft K nur endlich-viele Zellen von $\mathcal{Z}$. (Hinweis: Ein Teilraum, der jede Zelle in höchstens einem Punkt trifft, hat die diskrete Topologie.)

Aufgabe 35. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $d \in \mathbb{Z}$ beliebig. Zeigen Sie, dass es ein stetiges $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ mit $\deg(f) = d$ gibt. (Hinweis: Vollständige Induktion über n mit Induktionsanfang Aufgabe 19. Setzen Sie beim Induktionsschritt ein stetiges $f\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ vom Grad d zunächst homogen zu $f'\colon (\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \to (\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ fort und benutzen Sie dann, dass $\mathbb{S}^n \cong \mathbb{B}^n/\mathbb{S}^{n-1}$ ist.)

Aufgabe 36.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und X das Bukett von zwei n-dimensionalen Sphären $S_1 \cong \mathbb{S}^n$ und $S_2 \cong \mathbb{S}^n$, $X = S_1 \vee S_2$, sowie $\iota_j\colon S_j \to X$ $(j = 1, 2)$ die natürlichen Inklusionen, so dass also $\mathrm{H}_n(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ frei von $(\iota_1)_*([S_1])$ und $(\iota_2)_*([S_2])$ erzeugt wird (und $[S_1]$ und $[S_2]$ Orientierungen auf S_1 und S_2 sind). Sei weiter $[\mathbb{S}^n]$ eine Orientierung auf $\mathbb{S}^n$. Zeigen Sie (mit Hilfe von Aufgabe 35), dass es ein stetiges $h\colon \mathbb{S}^n \to X$ gibt mit
$$h_*([\mathbb{S}^n]) = (\iota_1)_*([S^1]) + (\iota_2)_*([S_2]).$$

(b) Zeigen Sie nun, dass es für alle $n, r \in \mathbb{N}$, einer beliebigen Orientierung $[\mathbb{S}^n]$ auf $\mathbb{S}^n$ und einem beliebigem Element $\alpha \in \mathrm{H}_n(X)$, wo X ein Bukett aus r Sphären der Dimension n ist, $X = S_1 \vee \cdots \vee S_r$, eine stetige Abbildung $f\colon \mathbb{S}^n \to X$ gibt mit
$$f_*([\mathbb{S}^n]) = \alpha.$$

Aufgabe 37. Sei $n \in \mathbb{N}$ und G eine beliebige abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass es einen wegzusammenhängenden Raum X gibt mit $\mathrm{H}_k(X) = 0$, für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$, und $H_n(X) = G$. (Hinweis: Wählen Sie Erzeuger $(\alpha_i)_{i\in I}$ und Relationen $(\beta_j)_{j\in J}$ für G. Kleben Sie dann an $Y := \bigvee_{i\in I} \mathbb{S}^n$ für jedes $j \in J$ eine $(n+1)$-Zelle e_j^{n+1} via einer Klebeabbildung $f_j\colon \mathbb{S}^n \to Y$ an Y an, die $(f_j)_*([\mathbb{S}^n]) = \beta_j$ (mit einer Orientierungswahl $[\mathbb{S}^n]$ auf $\mathbb{S}^n$) erfüllt (siehe Aufgabe 36):
$$X = Y \cup (\bigcup_{j\in J} e_j^{n+1}).$$

Abgabe: Dienstag, den 02.07.2024 bis 18 Uhr via „urm“