Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
David Seez

SS 2024
19.06.2024
Blatt 09

Übungen zu „Algebraische Topologie II“

Aufgabe 27. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\Delta_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ der Standard-Simplex der Dimension n.

(a) Sei $\delta^0_{n-1}\colon \Delta_{n-1} \to \dot{\Delta}_n$ der übliche Homöomorphismus auf die nullte Seite von Δ_n und $A_{n-1} \subseteq \dot{\Delta}_n$ die Vereinigung der anderen Seiten. Zeigen Sie, dass $\delta^0_{n-1}\colon ((\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}) \to (\dot{\Delta}_n, A_{n-1})$ einen Isomorphismus in der Homologie induziert. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $\Delta_{n-1}/\dot{\Delta}_{n-1} \cong \dot{\Delta}_n/A_{n-1}$ ist.)

(b) Sei nun $\partial_*\colon \mathrm{H}_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \to \mathrm{H}_{n-1}(\dot{\Delta}_n, A_{n-1})$ der verbindende Homomorphismus in der langen Homologiesequenz des Tripels $(\Delta_n, \dot{\Delta}, A_{n-1})$. Zeigen Sie, dass ∂_* ein Isomorphismus ist und die Komposition

$$\partial_*^{-1} \circ (\delta^0_{n-1})_*\colon \mathrm{H}_{n-1}(\Delta_{n-1}, \dot{\Delta}_{n-1}) \to \mathrm{H}_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$$

die Homologieklasse $[\mathrm{id}_{n-1}]$ in die Homologieklasse $[\mathrm{id}_n]$ überführt.

(c) Zeigen Sie damit schließlich,, dass das Element $[\mathrm{id}_n]$ die Homologiegruppe $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \cong \mathbb{Z}$ erzeugt.

Aufgabe 28. Sei $g \in \mathbb{N}$ und $E_{2g} \subsetneq \mathbb{R}^2$ das reguläre $2g$-Eck mit Ecken $z_1, \ldots, z_{2g}$ (zyklisch durchnummeriert). Sei weiter $\sim$ die Äquivalenzrelation auf E_{2g}, die von

$$(1-t)z_{2j-1} + tz_{2j} \sim (1-t)z_{2j} + tz_{2j+1}$$

(für $t \in [0,1]$, $j = 1, \ldots, g$ und $z_{2g+1} := z_1$) erzeugt wird. Wir nennen dann $N_g := E_{2g}/\sim$ *die nicht-orientierbare geschlossene Fläche vom Geschlecht g*. Definieren Sie nun eine geeignete CW-Struktur auf N_g und zeigen Sie für die zugehörige zelluläre Homologie:

$$\mathrm{H}_0(C(N_g)) \cong \mathbb{Z}, \quad \mathrm{H}_1(C(N_g)) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2, \quad \mathrm{H}_k(C(N_g)) = 0 \text{ für } k \geq 2.$$

Aufgabe 29. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathbb{S}^0 \subsetneq \mathbb{S}^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbb{S}^n$ jeweils als Äquator eingebettet. Wir betrachten auf $\mathbb{S}^k$ $(k = 0, \ldots, n)$ jeweils die obere und die untere Hemisphäre $E_\pm = \{x \in \mathbb{S}^k : \pm x_{k+1} > 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildungen $F^k_\pm\colon \mathbb{B}^k \to \mathbb{S}^k$,

$$F^k_\pm(x) = (x, \pm\sqrt{1 - \|x\|^2})$$

für die Zellen $e^k_\pm \subseteq \mathbb{S}^k$ charakteristisch sind und $(e^k_\pm)_{k=0,\ldots,n}$ zu einer CW-Struktur auf $\mathbb{S}^n$ machen.

(b) Wir orientieren nun $e^k_\pm$ mit $F^k_\pm$ (und der Standardorientierung $[\mathbb{B}^k]$ von $(\mathbb{B}^k, \mathbb{S}^{k-1})$). Sei $d\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ die Antipodenabbildung. Zeigen Sie:

$$d_* e^k_+ = (-1)^k e^k_-, \quad \partial e^{k+1}_+ = \partial e^{k+1}_- = \pm(e^k_+ - e^k_-).$$

(c) Auf dem reell-projektiven Raum $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = \mathbb{S}^n/d$ mit kanonischer Projektion $\pi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ betrachten wir nun die Zellzerlegung $(e^k)_{k=0,\dots,n}$, gegeben durch $e^k := \pi(e^k_+) = \pi^k(e^k_-)$ (mit $e^k_\pm$ aus (a)) und orientieren diese mit $\pi \circ F^k_+$. Zeigen Sie nun für den zellulären Randoperator ∂ der CW-Struktur (e^k) auf $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$:

$$\partial e^k = \pm(1 - (-1)^{k-1}) e^{k-1} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Abgabe: Dienstag, den 25.06.2024 bis 18 Uhr via „urm“