Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
David Seez

SS 2024
12.06.2024
Blatt 08

Übungen zu „Algebraische Topologie II“

Aufgabe 23. Seien X und Y topologische Räume, $B \subseteq Y$ abgeschlossen, $f\colon B \to X$ stetig und $\pi\colon X + Y \to X \cup_f Y$ die kanonische Projektion. Sind $i_X\colon X \to X + Y$ und $i_Y\colon Y \to X + Y$ die natürlichen Inklusionen, so zeigen Sie:

(a) $j := \pi \circ i_X\colon X \to X \cup_f Y$ ist eine Einbettung und $j(X) \subseteq X \cup_f Y$ ist abgeschlossen.

(b) $g := \pi \circ i_Y | Y \setminus B\colon Y \setminus B \to X \cup_f Y$ ist eine Einbettung und es gilt:

$$X \cup_f Y = j(X) \,\dot{\cup}\, g(Y \setminus B).$$

Aufgabe 24. Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ der reell-projektive Raum der Dimension n, $H \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ seine unendlich-ferne Hyperebene und $i\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \cong H \hookrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ihre Inklusion. Sei weiter $f\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ die kanonische Projektion und $X := \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \cup_f \mathbb{B}^n = \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \cup e^n$. Zeigen Sie, dass dann durch $\Phi | \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} = i$ und

$$(\Phi | e^n)(x_1, \cdots, x_n) = (1 - \|x\| : x_1 : \cdots : x_n)$$

ein Homöomorphismus $\Phi\colon X \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ gegeben wird.

Aufgabe 25. Sei $X = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ der 2-dimensionale Torus, $X^k = \mathbb{T}^2$ für $k \geq 2$,

$$X^1 = \{[x_1, x_2] \in X :\ x_1 \equiv 0 \text{ oder } x_2 \equiv 0 \bmod \mathbb{Z}^2\}$$

und $X^0 = \{[0, 0]\}$. Zeigen Sie, dass $(X^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine CW-Struktur auf $\mathbb{T}^2$ ist.

Aufgabe 26. Sei $(X, (X^k))$ ein CW-Raum und $A \subseteq X$ ein CW-Teilraum. Zeigen Sie: Setzt man für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ $A^k := A \cap X^k$, so ist (A^k) eine CW-Struktur auf A (und macht damit $(A, (A^k))$ selbst zu einem CW-Raum.)

Abgabe: Dienstag, den 18.06.2024 bis 18 Uhr via „urm“