Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
David Seez

SS 2024
05.06.2024
Blatt 07

Übungen zu „Algebraische Topologie II“

Aufgabe 19. Eine 1-Sphäre $K \subseteq \mathbb{S}^3$ heißt ein *Knoten*. Seien $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{S}^3$ disjunkte Knoten, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, und $i\colon K_1 \to \mathbb{S}^3 \setminus K_2$ die Inklusion. Seien $\varphi_1\colon H_1(K_1) \to \mathbb{Z}$ und $\varphi_2\colon H_1(\mathbb{S}^3 \setminus K_2) \to \mathbb{Z}$ jeweils Isomorphismen. Man setzt dann

$$d := |\deg(\varphi_2 \circ i_* \circ \varphi_1^{-1}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z})| \in \mathbb{N}_0$$

und nennt dies *die Verschlingungszahl von K_1 und K_2*.

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{lk}(K_1, K_2)$ wohldefiniert ist, d.h., nicht von der Wahl der Isomorphismen φ_1 und φ_2 abhängt.

(b) Seien $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{S}^3$ die (trivialen) Knoten

$$K_1 = \{(z, w) \in \mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{C}^2 :\ w = 0\},\ K_2 = \{(z, w) \in \mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{C}^2 :\ z = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass *K_1 und K_2 verschlungen sind*, d.h.: $\operatorname{lk}(K_1, K_2) \neq 0$. (Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $r\colon \mathbb{S}^3 \setminus K_2 \to K_1$, $(z, w) \mapsto (\frac{z}{|z|}, 0)$.)

Aufgabe 20. Sei (X, A) ein Raumpaar und $\partial_*\colon H_k(X, A) \to H_{k-1}(A)$ der k. verbindende Homomorphismus der langen Homologie-Sequenz des Raumpaares (X, A). Zeigen Sie für alle A-relativen Zykel $z \in S_k(X)$, wobei $\bar{z}$ die Restklasse in $S_k(X, A) = S_k(X)/S_k(A)$ bezeichne:

$$\partial_*([\bar{z}]_{(X,A)}) = [\partial z]_A.$$

Aufgabe 21. Sei G eine abelsche Gruppe und $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen. Zeigen Sie, dass es einen natürlichen Isomorphismus von $H_1/(H_1 \cap H_2)$ nach $(H_1 + H_2)/H_2$ gibt (1. Noetherscher Isomorphiesatz).

Aufgabe 22.

(a) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ jeweils offen, nicht-leer und zueinander homöomorph. Zeigen Sie: $n = m$. (Hinweis: Ist $f\colon U \to V$ ein Homöomorphismus, so wähle man ein $p \in U$ und betrachte den induzierten Homöomorphismus $f\colon (U, U \setminus \{p\}) \to (V, V \setminus \{f(p)\})$.

(b) Sei X eine nicht-leere topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass dann X nicht auch eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m \neq n$ sein kann.

Abgabe: Dienstag, den 11.06.2024 bis 18 Uhr via „urm“