Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2023

# Mathematik 2 für Naturwissenschaftler∗innen

Nachklausur am 17.10.2023

---

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.**

Es sind maximal 100 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

---

**Aufgabe 1** (4+4+8 = 16 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$  b) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^2}$

c) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{6x^3 - x + 1}{x^4 - x^2}\,\mathrm{d}x$  Hinweis: Partialbruchzerlegung

**Aufgabe 2** (6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y' = 4x^3\,\mathrm{e}^{-y},\ y(2) = 0$.

**Aufgabe 3** (4+2+4 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y(x)$ von $y'' + 2y' + 2y = 0$.
b) Lösen Sie das AWP $y'' + 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 23$.
c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 2y' + 2y = 2x + 3$.

**Aufgabe 4** (10+2+3 = 15 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von $A$.
b) Führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine orthogonale Matrix $U$ und eine Diagonalmatrix $D$ an, so dass $D = U^T A U$.
c) Bestimmen Sie $\left(\frac{1}{6}A\right)^{2023}\vec{x}$.

**Aufgabe 5** (8 Punkte)

Sei $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{K}$ in Kreis um den Ursprung mit Radius 2.

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$.

**Aufgabe 6** (9 Punkte)

Wie Sie wissen, gilt $\quad \log(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^{2n} \quad$ für $|x| < 1$.

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\log(1 + A^2)$, wobei wir den Matrix-Logarithmus über die Taylorreihe definieren, d.h. $\quad \log(1+A^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, A^{2n}$.

**Aufgabe 7** (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x,y) = 3(x-y)^3 + (x+y)^2 - 9(x-y)\,,$$

d.h. alle $(x,y)$ mit $(\nabla f)(x,y) = 0$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

HINWEIS: Es ist hilfreich, $f_x + f_y$ zu betrachten.

**Aufgabe 8** (3+3+4 = 10 Punkte)

Sei $\vec{f}:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x^2 \cos y \\ y\, \mathrm{e}^x \end{pmatrix}\,, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,.$$

a) Besitzt $\vec{f}$ in einer Umgebung von $\vec{x}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ eine Umkehrfunktion $\vec{f}_1^{-1}$?

b) Besitzt $\vec{f}$ in einer Umgebung von $\vec{x}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ eine Umkehrfunktion $\vec{f}_2^{-1}$?

c) Bestimmen Sie ggf. die Ableitungen $\vec{f}_1^{-1\prime}(f(\vec{x}_1))$ und $\vec{f}_2^{-1\prime}(f(\vec{x}_2))$.

**Aufgabe 9** (8 Punkte)

Bestimmen Sie das Volumen von

$$K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\phi \\ r \sin\theta \sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}\,, \quad \begin{matrix} 0 \le r \le 1 - \cos\theta \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \phi < 2\pi \end{matrix} \right\}\,,$$

d.h. berechnen Sie $|K| = \int_K \mathrm{d}V$.

**Aufgabe 10** (8 Punkte)

Die Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\mathcal{F} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = 2x^2 - y^2\,,\ |x| \le 1\,,\ |y| \le 1 \right\}\,.$$

Bestimmen Sie den Fluss von $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}$ durch $\mathcal{F}$, d.h. berechnen Sie $\int_{\mathcal{F}} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{O}$.