Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose, Nikolai Edeko
Aron Müller, Marius Müller

SoSe 2020
25.05.2020
Blatt 07

Musterlösungen zu den Übungen der Analysis II

Aufgabe 25 (Weierstraßsches Konvergenzkriterium für gleichmäßige Konvergenz). Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall und $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig. Wir definieren *die Maximumsnorm von* f durch

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \in [0,\infty) : \ x \in K\} \in [0,\infty),$$

(welche tatsächlich in $[0,\infty)$ liegt, da f sein Supremum annimmt.)

Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen auf K mit der Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < \infty.$$

Zeigen Sie, dass dann $(\sum_1^n f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion f auf K konvergiert. (Hinweis: Für jedes $x \in K$ ist die Konvergenz von $\sum_1^\infty f_n(x)$ sogar absolut.)

Lösungsvorschlag. Es bezeichne $C(K,\mathbb{R})$ die Menge der stetigen Funktionen von K nach $\mathbb{R}$. Sei nun

$$f\colon \mathbb{N} \to C(K,\mathbb{R})$$

sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f(n)\| < \infty$$

wobei $\|\cdot\|$ die Maximumsnorm bezeichnet. Zu f definieren wir die Funktion

$$\begin{aligned} \xi_f\colon \mathbb{N} &\to \mathrm{C}(K,\mathbb{R}) \\ n &\mapsto \sum_{k=1}^{n} f(k) \end{aligned}$$

wobei für $n \in \mathbb{N}$ die Summe $\sum_{k=1}^n f(k)$ bzgl. der durch $\mathbb{R}$ auf $\mathrm{C}(K,\mathbb{R})$ induzierten (Vektorraum-)addition zu verstehen ist.

Man bemerke, dass eine Folge in einer Menge X per Definition einfach eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach X ist: f nimmt also die Rolle der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein wohingegen $f(n)$ die von f_n einnimmt, indem man einfach $f_n := f(n)$ definiert.

Was wir zeigen wollen ist, dass ξ_f gleichmäßig gegen ein Element von $C(K, \mathbb{R})$ konvergiert, d.h.: es gibt $\omega \in C(K, \mathbb{R})$ sodass für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ eine natürliche Zahl N_ε existiert, mit der Eigenschaft, dass für alle natürlichen $n \geq N_\varepsilon$ und $x \in K$

$$|(\xi_f(n))(x) - \omega(x)| < \varepsilon$$

Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ mit $m_2 > m_1$. Dann ist mit der Dreiecksungleichung[1] ($\triangle$) für die Maximumsnorm $\|\cdot\|$

$$\begin{aligned} \|\xi_f(m_2) - \xi_f(m_1)\| = \left\| \sum_{k=1}^{m_2} f_k - \sum_{k=1}^{m_1} f_k \right\| &= \left\| \sum_{k=m_1+1}^{m_2} f_k \right\| \\ &\leq \sum_{k=m_1+1}^{m_2} \|f_k\| \qquad (\triangle) \end{aligned}$$

Weil aber für f

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f(k)\| < \infty$$

gilt, gibt es - dem Cauchy-Kriterium für Reihen zufolge - für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $N \in \mathbb{N}$ sodass für alle natürlichen $m_1, m_2 \geq N$ mit $m_2 > m_1$

$$\sum_{k=m_1+1}^{m_2} \|f_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Insbesondere heißt das: für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ sodass für alle natürlichen $m_2, m_1 \geq N$ mit $m_2 > m_1$

$$\|\xi_f(m_2) - \xi_f(m_1)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Bis jetzt haben wir im Prinzip gezeigt, dass ξ_f eine allgemeinere Art von Cauchyfolge ist.
Sei also $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ und es bezeichne im weiteren N_ε eine natürliche Zahl[2], sodass für alle natürlichen $m_1, m_2 \geq N_\varepsilon$ mit $m_2 > m_1$

$$\|\xi_f(m_2) - \xi_f(m_1)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei weiter $y \in K$. Dann ist für alle natürlichen $m_2, m_1 \geq N_\varepsilon$ mit $m_2 > m_1$

$$|\xi_f(m_2)(y) - \xi_f(m_1)(y)| = |\left(\xi_f(m_2) - \xi_f(m_1)\right)(y)| \leq \|\xi_f(m_2) - \xi_f(m_1)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dies zeigt, dass

$$\begin{aligned} s_y \colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto (\xi_f(n))(y) \end{aligned}$$

[1] wird in Aufgabe 28 gezeigt
[2] man bemerke, dass diese nur von ε abhängt

eine reelle Cauchyfolge definiert. Mit der Vollständigkeit der reellen Zahlen konvergiert s_y (eigentlich).

$$\begin{aligned}\omega\colon K &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \lim_{n\to\infty}(s_x)\end{aligned}$$

ist also wohldefiniert weil alle Grenzwerte in $\mathbb{R}$ existieren und eindeutig sind.
Jetzt können wir den Beweis beenden, indem wir zeigen, dass die „Cauchyfolge“ ξ_f gegen ω „konvergiert“.
Wegen der Stetigkeit der Betragsfunktion $|\cdot|$ (C) gilt also für alle natürlichen $n \geq N_\varepsilon$ und $x \in K$

$$\begin{aligned}|(\xi_f(n))(x) - \omega(x)| &= \left|(\xi_f(n))(x) - \lim_{m\to\infty}(s_x)\right|\\ &= \left|\lim_{m\to\infty}((\xi_f(n))(x) - (\xi_f(m))(x))\right|\\ &= \lim_{m\to\infty}|((\xi_f(n))(x) - (\xi_f(m))(x))| && \text{(C)}\\ &\leq \lim_{m\to\infty}\frac{\varepsilon}{2} && \text{(Ana1)}\\ &= \frac{\varepsilon}{2}\\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass ξ_f gleichmäßig gegen ω konvergiert. Aus der Vorlesung wissen wir aber, dass ω dann schon stetig sein muss - also $\omega \in C(K,\mathbb{R})$. Damit haben wir gezeigt was wir zeigen wollten.

Aufgabe 26. Sei P eine formale Potenzreihe mit Konvergenzradius $R_P > 0$. Sei weiter $f_P\colon I_P \to \mathbb{R}$ die von P induzierte Funktion auf $I_P = (-R_P, R_P)$. Sei weiter P' die formale Ableitung von P.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $0 < r < R_P$ die Partialsummen f_n von f auf $K_r = [-r, r]$ gleichmäßig gegen $f|K_r$ konvergieren. (Hinweis: Schummeln Sie noch ein s zwischen r und R_P ein und versuchen Sie dann Aufgabe 25 anzuwenden.)

(b) Zeigen Sie: $R_{P'} = R_P$ (vgl. Aufgabe 23.c). (Hinweis: Verwenden Sie den Weierstraßschen Satz über die Vertauschung von Limites bei Funktionenfolgen und Integration.)

(c) Zeigen Sie nun noch, dass f_P ∞-oft differenzierbar ist und dass Sie unter dem Summenzeichen differenzieren dürfen,

$$f_P' = f_{P'}.$$

Lösungsvorschlag. Als Vorbemerkung: In der Vorlesung hatten wir das folgende Theorem.

2.1 Theorem Sei I ein abgeschlossenes Intervall und $n \in \mathbb{N}$. Sei weiter $f_n \in C^1(I,\mathbb{R})$. Gibt es $f, g\colon I \to \mathbb{R}$, sodass

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert

- $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen g konvergiert

Dann ist $f \in C^1(I, \mathbb{R})$ und es gilt $f' = g$.

Sei $P\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ eine formale Potenzreihe mit Konvergenzradius $R_P \in [0, \infty]$. Sei weiter $I_P := (-R_P, R_P)$ falls $R_P \neq 0$ und $I_P := \{0\}$ sonst sowie

$$\begin{aligned} f_P\colon I_P &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} P_k x^k \end{aligned}$$

wobei $P_k := P(k)$ für $k \in \mathbb{N}_0$ sein soll.
Man bemerke, dass eine formale Potenzreihe P im Körper $\mathbb{R}$ eine Abbildung von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{R}$ ist, was man als $P := \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ auszudrücken versucht, wobei $a_k := P(k)$ für $k \in \mathbb{N}_0$.
Sei $0 < r < R_P$ und $K_P^r := [-r, r]$. Man bemerke: da $r < \infty$ ist, ist K_P^r beschränkt. Und abgeschlossen sowieso. Sei weiter $N \in \mathbb{N}_0$ und

$$\begin{aligned} M_N^P\colon K_P^r &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto P_N x^N \end{aligned}$$

M_N ist offenbar stetig. Es bezeichne

$$\begin{aligned} S^P\colon \mathbb{N} &\to (K_P^r \to \mathbb{R}) \\ n &\mapsto \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}^P \end{aligned}$$

die Folge der Partialsummen von $f_P|_{K_P^r}$.
Die formale Ableitung P' einer formalen Potenzreihe P ist die Abbildung

$$\begin{aligned} P'\colon \mathbb{N}_0 &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto (n+1)P(n+1) \end{aligned}$$

Man bemerke, dass P' selbst eine formale Potenzreihe ist und es somit Sinn macht von $R_{P'}, I_{P'}, K_{P'}^r, M_N^{P'}, S^{P'}$ zu sprechen.

(a) Um Aufgabe 25 auf S^P anwenden zu können, müssen wir noch zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|M_{k-1}^P\| < \infty$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist aber

$$\sum_{k=1}^{n} \|M_{k-1}^P\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|P_k r^k\right|$$

und weil $\sum_{k=0}^{\infty} P_k r^k$ nach Vorausetzung absolut konvergiert (es ist ja $r < R_P$) ist deshalb

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|M_{k-1}^P\| < \infty$$

Aufgabe 25 sagt dann, dass S^P gleichmäßig gegen ein $\omega \in C(K_P^r, \mathbb{R})$ konvergiert, wobei für alle $x \in K_P^r$

$$\omega(x) = \lim_{n\to\infty} \left(S_n^P(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} M_{k-1}^P(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(P_k x^k\right) = f_P(x)$$

gilt. Also $\omega = f_P|_{K_P^r}$ und S^P konvergiert somit gleichmäßig gegen $f_P|_{K_P^r}$.

(b) Wegen Aufgabe 23(c) reicht es zu zeigen, dass $R_{P'} \leq R_P$ bzw. äquivalent: ist $x \in I_{P'}$ mit $x \geq 0$ dann konvergiert

$$\begin{aligned} s_x \colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto \sum_{k=0}^{n} P_k x^k \end{aligned}$$

Sei also $x \in I_{P'}$ und $x \geq 0$. Dann gibt es $r \in \mathbb{R}$ sodass $0 \leq x < r < R_{P'}$. Nach Teil (a) konvergiert $S^{P'}$ gleichmäßig gegen $f_{P'}|_{K_{P'}^r}$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Mit der Linearität des Integrals folgt dann

$$\begin{aligned} s_x(n) &= \sum_{k=0}^{n} P_k x^k \\ &= P_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x (k+1) P_{k+1} t^k \mathrm{d}t \\ &= P_0 + \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k' t^k\right) \mathrm{d}t \\ &= P_0 + \int_0^x \left(S_n^{P'}\right)(t) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Und weil $S_n^{P'}$ offenbar stetig ist, folgt mit dem Weierstraßschen Satz (14.7 im Skript)

$$\lim_{n\to\infty} (s_x) = P_0 + \int_0^x f_{P'}|_{K_P^r}(t) \mathrm{d}t$$

Dies zeigt, dass s_x konvergiert.

(c) Sei $x \in I_P$. Wir wollen zunächst zeigen, dass f_P in x differenzierbar ist. Dazu stellen wir fest, dass es ein $r \in I_P$ gibt, sodass $x \in (-r, r)$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt offensichtlich

$$S_n^P, S_n^{P'} \in C([-r, r], \mathbb{R})$$

Aus (a) wissen wir, dass

- S^P gleichmäßig gegen $f_P|_{[-r,r]}$ konvergiert
- $S^{P'}$ gleichmäßig gegen $f_{P'}|_{[-r,r]}$ konvergiert

Weil aber

$$\left(S_n^P\right)'(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} P_{k-1}x^{k-1}\right)' = \sum_{k=1}^{n-1} kP_k x^{k-1} = S_{n-1}^{P'}(x)$$

gilt dass

- $((S_n^P)')_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f_{P'}|_{[-r,r]}$ konvergiert

und wir können Theorem 2.1 benutzen um zu schließen, dass $f_P|_{[-r,r]}$ stetig differenzierbar ist mit Ableitung $f_{P'}|_{[-r,r]}$. Insbesondere ist dann f_P in x stetig differenzierbar und es gilt $f_P'(x) = f_{P'}(x)$.
Da unser Kontext $x \in I_P$ enthält, folgt, dass f_P stetig differenzierbar ist und $f_P' = f_{P'}$ gilt. Ein einfaches Induktionsargument (welches dem Leser überlassen bleibt) zeigt jetzt, dass f_P tatsächlich glatt ist.
Informell wenden wir einfach den gleichen Prozess im Fall $Q := P'$ mit f_Q an, was wir machen können, weil P' selbst eine formale Potenzreihe ist. Das machen wir wieder und wieder was ja einfach ein Induktionbeweis ergibt wenn man diese Idee formalisiert. (Das müsste man dann jetzt eigentlich auch tun.)

Aufgabe 27. (a) Benutzen Sie die geometrische Reihe für $t \mapsto (1+t^2)^{-1}$ und geeignete Vertauschungsargumente, um für alle $x \in (-1,1)$ die folgende Reihendarstellung des Arcustangens zu bekommen:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

(b) Zeigen Sie nun mit Hilfe des *Leibnizschen Konvergenzkriteriums* ($\sum_0^\infty (-1)^n a_n$ ist konvergent, falls $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und (a_n) eine monoton fallende Nullfolge ist, vgl. das Weihnachtsblatt in Analysis 1) und des Abelschen Grenzwertsatzes (siehe Aufgabe 24) das folgende Resultat von *G. F. Leibniz*:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Lösungsvorschlag.

(a) Sei P die formale geometrische Reihe, die Konvergenzradius $R_P = 1$ hat und sei

$$\begin{aligned} f_P \colon (-1,1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

die von P induzierte Funktion. Insbesondere gilt also für $t \in (-1,1)$, dass

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(-t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n \tag{1}$$

da hier $-t^2 \in (-1,1)$. Nach Aufgabe 26 konvergiert nun für jedes $0 < x < 1$ die Folge S der Partialsummen von f_P auf $[-x,x]$ gleichmäßig gegen $f_P|_{[-x,x]}$ und damit aber auch auf $[0,x]$ gleichmäßig gegen $f_P|_{[0,x]}$. Da alle Partialsummen $S(k)$ für $k \in \mathbb{N}$ sowie f_P selbst stetig sind, gilt nach dem Satz über die Vertauschung von Grenzwert und Integral, dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^x \sum_{n=0}^k y^n \mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty} \int_0^x (S(k))(y)\mathrm{d}y = \int_0^x f_P(y)\mathrm{d}y = \int_0^x \frac{1}{1-y}\mathrm{d}y \tag{2}$$

Nach der Definition des arctan gilt für $x \in (0,1)$ damit

$$\begin{aligned}
\arctan(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_0^x \sum_{n=0}^k (-t^2)^n \mathrm{d}t && ((1),(2)) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^k (-1)^n \int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t && (**) \\
&= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}$$

wobei wir bei $(**)$ die Linearität des Integrals verwendet haben. Für $x = 0$ sind beide Seiten hier 0 und für $x \in (-1,0)$ ist die Konvergenz der Partialsummen auf $[x,0]$ gleichmäßig gegen $f_P|_{[x,0]}$ und es gilt wie in (2)

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^x \sum_{n=0}^k y^n \mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty} -\int_x^0 (S(k))(y)\mathrm{d}y = -\int_x^0 f_P(y)\mathrm{d}y = \int_0^x \frac{1}{1-y}\mathrm{d}y$$

womit die gleiche Rechnung die Aussage zeigt.

(b) In (a) haben wir gesehen, dass die formale Potenzreihe

$$\begin{aligned}
P\colon \mathbb{N}_0 &\to \mathbb{R} \\
n &\mapsto \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

oder in der Schreibweise mit der Unbestimmten X,

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} X^{2n+1}$$

für $x \in (-1,1)$ konvergiert. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\
n &\mapsto \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}
\end{aligned}$$

keine Nullfolge und somit P nicht konvergent. Daher ist der Konvergenzradius $R = 1$. Da nun

$$\frac{1}{2n+1} > 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

eine monoton fallende Nullfolge ist, folgt aus dem Leibnizschen Konvergenzkriterium, dass P auch für $x = 1$ konvergiert. Aus dem Abelschen Grenzwertsatz und der Stetigkeit von arctan folgt somit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1} \arctan(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Für den letzten Schritt beachte

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

und folglich

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1$$

Aufgabe 28. Sei X eine nicht-leere Menge und $\mathcal{F}(X)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellwertigen Funktionen auf X.

(a) Zeigen Sie, dass

$$V = \{f \in \mathcal{F}(X) : \ f \text{ ist beschränkt}\}$$

ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(X)$ ist.

(b) Wir definieren nun $\|\cdot\|\colon V \to [0, \infty)$ durch

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \in [0, \infty) : \ x \in X\} \in [0, \infty).$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ einen Norm auf V ist.

Lösungsvorschlag.

(a) Um zu zeigen, dass eine nicht-leere Teilmenge eines Vektorraums ein Untervektorraum ist, reicht es zu zeigen, dass sie abgeschlossen ist bezüglich der Addition und der Skalarmultiplikation. Seien also $f, g \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann müssen wir zeigen, dass $f + g$ und αf beschränkt sind, d.h.

$$\begin{aligned} S_{f+g} &:= \sup\{|f(x) + g(x)| \colon x \in X\} < \infty \\ S_{\alpha f} &:= \sup\{|\alpha f(x)| \colon x \in X\} < \infty \end{aligned}$$

Da nun f und g beschränkt sind gilt

$$S_f := \sup \{|f(x)| \colon x \in X\} < \infty$$
$$S_g := \sup \{|g(x)| \colon x \in X\} < \infty$$

Damit folgt für alle $x \in X$,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq S_f + S_g$$
$$|\alpha f(x)| = |\alpha| \cdot |f(x)| \leq |\alpha| \cdot S_f$$

Aufgrund der Supremumseigenschaft von S_{f+g} und $S_{\alpha f}$ folgt damit aber

$$S_{f+g} \leq S_f + S_g < \infty \tag{3}$$
$$S_{\alpha f} \leq |\alpha| \cdot S_f < \infty \tag{4}$$

(b) Wir müssen die drei Eigenschaften einer Norm nachweisen. Seien also $f, g \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Aus der Definition ist klar, dass $\|f\| \geq 0_{\mathbb{R}}$. Für $0_V \in V$ ist

$$\|0_V\| = \sup \{|0_V(x)| \colon x \in X\} = \sup \{0_{\mathbb{R}}\} = 0_{\mathbb{R}}$$

Ist umgekehrt $\|f\| = 0_{\mathbb{R}}$, dann gilt für alle $x \in X$, dass $|f(x)| \leq \|f\| = 0_{\mathbb{R}}$, also $f(x) = 0_{\mathbb{R}}$ und somit ist $f = 0_V$.

(ii) Aus (a) (4) wissen wir bereits $\|\alpha f\| \leq |\alpha| \|f\|$. Es gilt aber auch für alle $x \in X$, dass

$$|f(x)| = \frac{|\alpha| \cdot |f(x)|}{|\alpha|} = \frac{|\alpha f(x)|}{|\alpha|} \leq \frac{\|\alpha f\|}{|\alpha|}$$

Aufgrund der Definition von $\|f\|$ als Supremum folgt also

$$\|f\| \leq \frac{\|\alpha f\|}{|\alpha|}$$

und somit $|\alpha| \|f\| \leq \|\alpha f\|$. Insgesamt ist also $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$.

(iii) Aus (a) (3) wissen wir bereits $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.