

## Übungen zur Analysis II

**Aufgabe 17. (a)** Sei  $n \in \mathbf{N}_0$  und  $p \in \mathbb{R}[X]$  ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich  $n$ . (Das Nullpolynom habe Grad  $-\infty$ .) Sei weiter  $\lim_{x \rightarrow 0} p(x)/x^n = 0$ . Zeigen Sie, dass  $p = 0$  sein muss.

**(b)** Sei nun  $n \in \mathbf{N}_0$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a \in I$  und  $f \in \mathcal{C}^n(I)$ . Zeigen Sie: Ist  $p \in \mathbb{R}[X]$  ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich  $n$  mit

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - p(x)}{(x - a)^n} = 0,$$

so muss  $p$  das Taylorpolynom von  $f$  in  $a$  der Ordnung  $n$  sein,  $p = P_{a,n}^f$ .

**Aufgabe 18.** Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

**(a)** Zeigen Sie, dass  $f$  differenzierbar ist, dass  $f'(0) = 0$  ist,  $f$  aber weder lokales Extremum noch Sattelpunkt in 0 hat.

**(b)** Zeigen Sie, dass  $f'$  nicht stetig ist.

**Aufgabe 19** (Vorzeichenwechsel) Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $a \in I$ . Wir sagen, dass eine stetige Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $a$  einen *Vorzeichenwechsel* hat, wenn gilt: Es existiert ein  $\delta > 0$ , so dass für  $f$  einer der beiden folgenden Fälle eintritt: (i) Für  $x \in I$  mit  $a - \delta < x < a$  ist  $f(x) < 0$  und für  $x \in I$  mit  $a < x < a + \delta$  ist  $f(x) > 0$ , oder (ii) für  $x \in I$  mit  $a - \delta < x < a$  ist  $f(x) > 0$  und für  $x \in I$  mit  $a < x < a + \delta$  ist  $f(x) < 0$ .

**(a)** Zeigen Sie: Ist  $f \in \mathcal{C}^1(I)$  mit  $f(a) = 0$  und  $f'(a) \neq 0$ , so hat  $f$  in  $a$  einen Vorzeichenwechsel.

**(b)** (Wendepunkt) Ist  $f \in \mathcal{C}^2(I)$ , so nennen wir  $a \in I$  einen *Wendepunkt* (eigentlich besser *Wendestelle*) von  $f$ , wenn  $f''$  in  $a$  einen Vorzeichenwechsel hat. Zeigen Sie: Ist  $f \in \mathcal{C}^3(I)$  mit  $f''(a) = 0$  und  $f'''(a) \neq 0$ , so ist  $a$  ein Wendepunkt von  $f$ .

**Aufgabe 20** (Rationale Funktionen). Sei  $\mathbb{R}[X]$  der *Polynomring* aller Polynome mit reellen Koeffizienten und  $\sim$  folgende Relation auf  $\mathbb{R}[X] \times (\mathbb{R}[X] \setminus \{0\})$ :  $(f, g) \sim (p, q) : \Leftrightarrow fq = gp$ .

**(a)** Zeigen Sie, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist. (Wir nennen eine Äquivalenzklasse  $[(p, q)] =: \frac{p}{q}$  eine *rationale Funktion* (mit reellen Koeffizienten).)

**Bitte wenden**

(b) Definieren Sie (nach dem Vorbild von  $\mathbb{Q}$ ) Addition und Multiplikation auf dem *Quotientenkörper*  $\mathbb{R}(X) := (\mathbb{R}[X] \times (\mathbb{R}[X] \setminus \{0\})) / \sim$  und zeigen Sie, dass  $\mathbb{R}(X)$  damit tatsächlich ein Körper wird.

(c) Wir definieren nun zu jedem  $r \in \mathbb{R}(X)$  eine Funktion  $f_r: I \rightarrow \mathbb{R}$  wie folgt: Wähle einen Repräsentanten  $(p, q)$  von  $r$ , so dass  $p$  und  $q$  *teilerfremd* sind, setze dann  $I = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$  und schließlich  $f(x) := p(x)/q(x)$ . Zeigen Sie, dass das wohldefiniert und die Zuordnung  $r \mapsto f_r$  injektiv ist. (Hinweis: Hat ein Polynom unendlich-viele Nullstellen, so ist es bereits das Nullpolynom.)

**Abgabe:** Sonntag, 17. Mai 2020, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor