Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

SoSe 2020
21.06.2020
Blatt 10

Übungen zur Analysis II

Aufgabe 37. Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das kanonische Orthonormalsystem in l^2 (vgl. Aufgabe 30).

(a) Berechnen Sie $\|e_n - e_m\|$, für alle $m, n \in \mathbb{N}$, und begründen Sie, dass (e_n) keinen Häufungspunkt hat.

(b) Zeigen Sie, dass die *Einheitskugel* $\mathbb{B} \subseteq l^2$, d.h.: $\mathbb{B} = \{x \in l^2 : \|x\| \leq 1\}$, zwar abgeschlossen und beschränkt in l^2 ist, nicht aber kompakt.

Aufgabe 38. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Teilmenge, die nicht kompakt ist. Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ gibt, die ihr Infimum nicht annimmt. (Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle, wo X nicht beschränkt und X nicht abgeschlossen ist und wählen Sie für f eine geeignete Abstandsfunktion.)

Aufgabe 39. (a) Berechnen Sie die Gradienten von $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0.0)\} \to \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = y \cdot \sqrt{2x^2 + y^2}, \quad g(x,y) = x \cdot \exp(x^2 - y^2).$$

(b) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt. Zeigen Sie, dass für alle zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktionen $f, g: G \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\triangle(f \cdot g) = \triangle(f) \cdot g + 2\langle \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g) \rangle + f \cdot \triangle(g).$$

Aufgabe 40. Zeigen Sie, dass folgende Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar aber in $(0,0)$ unstetig ist:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \text{ für } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0.$$

Abgabe: Sonntag, 28. Juni 2020, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor