UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Lou-Jean Cobigo

Convex Geometry

Wintersemester 2024/25

Übungsblatt 8

Due on: Donnerstag, 19.12.2024, 10:00

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Wir betrachten Polynome in mehreren Variablen, i.e. in $K[\underline{x}]$. Wir verwenden die Multiindexschreibweise $\underline{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ für $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Sei $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^n$ und $f = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} c_\alpha \underline{x}^\alpha$ mit $c_\alpha \in K$. Das *Newtonpolytop von* f ist definiert als $\mathrm{Newt}(f) := \mathrm{conv}(\alpha \in \mathcal{A} \mid c_\alpha \neq 0)$.

- Zeichnen Sie das Newtonpolytop von $f = 1 + 2x^2 + 3x - 4xy + \frac{1}{5}y$.
- Zeigen Sie: für die Minkowskisumme zweier Newtonpolytope gilt $\mathrm{Newt}(f) + \mathrm{Newt}(g) = \mathrm{Newt}(f \cdot g)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $h \in K[\underline{x}]$ ein Polynom. Der Grad eines multivariablen Monoms ist definiert als die Summe der Einträge des Exponentenvektoren, also $\deg(\underline{x}^\alpha) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Der Grad eines Polynoms ist definiert als das Maximum der Grade der Terme.

Sei $\mathrm{Newt}(h)$ eine Minkowskisumme zweier Polytope, $\mathrm{Newt}(h) = P + Q$. Gibt es Polynome f und g vom Grad > 0 mit $h = f \cdot g$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $f = x - x^2 + 3y + xy + ix^2y \in \mathbb{C}[x, y]$ und V sei die (standard) Hyperfläche dual zu $\mathrm{Newt}(f)$. Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$ die Projektion. Berechnen Sie $\Sigma = g_*(V)$. Sei Σ_m der gewichtete Fächer mit derselben Fächerstruktur wie Σ, aber mit m-fachen Gewichten ($m \in \mathbb{N}$). Können wir Σ_m auch als $h_*(V)$ für eine Abbildung h bekommen?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ der Fächer mit den Kegeln

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cone}\big((-1,0,1),(0,1,1),(0,-1,1)\big)\\
&\mathrm{Cone}\big((1,0,1),(0,1,1),(0,-1,1)\big)\\
&\mathrm{Cone}\big((-1,0,-1),(0,1,-1),(1,0,-1)\big)\\
&\mathrm{Cone}\big((1,0,-1),(0,-1,-1),(-1,0,-1)\big)\\
&\mathrm{Cone}\big((0,1,1),(-1,0,1),(-1,0,-1),(0,1,-1)\big)\\
&\mathrm{Cone}\big((-1,0,1),(0,-1,1),(0,-1,-1),(-1,0,-1)\big)\\
&\mathrm{Cone}\big((0,-1,-1),(0,-1,1),(1,0,1),(1,0,-1)\big)\\
&\mathrm{Cone}\big((0,1,1),(1,0,1),(0,1,-1),(1,0,-1)\big)
\end{aligned}$$

sowie allen ihren Seiten. Zeigen Sie: Σ ist ein vollständiger Fächer, der nicht Normalenfächer eines Polytops ist.

Abgabe via URM. Die Übungen finden immer Mittwochs 12-14, in S11.