UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Lou-Jean Cobigo

Convex Geometry

Wintersemester 2024/25

Übungsblatt 12

Due on: Donnerstag, 30.01.2025, 10:00

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{T}_h$ der Tetraeder mit Eckpunkten $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,h)$ wobei $h \in \mathbb{Z}_{>0}$. Bestimmen Sie

$$L_{\mathcal{T}_h}(t) = c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0.$$

Hinweis: Nutzen Sie Polynomeninterpolation. Rechnungen lassen sich vereinfach, indem Sie zum Beispiel folgende Aussagen verwenden:

- $c_d = vol(\mathcal{T}_h)$.
- $L_{\mathcal{T}_h^\circ}(t) = -L_{\mathcal{T}_h}(-t)$.

Diese werden noch in der Vorlesung gezeigt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Zu jeder Permutation $\pi \in S_3$ definieren wir

$$\Delta_\pi = \operatorname{conv}(0, e_{\pi(1)}, e_{\pi(1)} + e_{\pi(2)}, e_{\pi(1)} + e_{\pi(2)} + e_{\pi(3)}) \subset \mathbb{R}^3,$$

wobei e_1, e_2 und e_3 die Einheitsvektoren bezeichnen.

(a) Zeigen Sie: $\{\Delta_\pi : \pi \in S_3\}$ ist eine Triangulierung des Würfels $P := [0,1]^3$, d.h. eine endliche Menge T von 3-Simplizes mit $P = \bigcup_{\Delta \in T} \Delta$ und für $\Delta_1, \Delta_2 \in T$ ist $\Delta_1 \cap \Delta_2$ eine gemeinsame Seite von Δ_1 und Δ_2,

(b) Zeigen Sie: Alle Δ_π sind kongruent, d.h. je zwei können durch Translationen, Rotationen oder Reflektionen ineinander überführt werden.

(c) Zeigen Sie: $L_{\Delta_\pi}(t) = \binom{3+t}{3}$.

Hinweis: Die Aussagen gelten allgemeiner für d-dimensionale Würfel.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $f_\sigma(z)$ für

- $\sigma := \operatorname{cone}(e_1, e_2)$.
- $\sigma := \operatorname{cone}(e_2, e_1 + e_2)$.
- $\sigma := \operatorname{cone}(e_2, 2e_1 + e_2) + (3,4)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $S \subset \mathbb{R}^n$ und $T \subset \mathbb{R}^m$ zwei Teilmengen. Zeigen Sie:

$$f_{S \times T}(z_1, ..., z_{n+m}) = f_S(z_1, ..., z_n) \cdot f_T(z_{n+1}, ..., z_{n+m}),$$

wobei $f_S(z) := \sum_{k \in S \cap \mathbb{Z}^n} z^k$.

Abgabe via URM. Die Übungen finden immer Mittwochs 12-14, in S11.