Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
D. Agostini, C. Nollau

Geometrie
WS 2024/25

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Präsenzblatt

Dieses Blatt wird in der ersten Übungseinheit besprochen.

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein affiner Unterraum $L \subseteq \mathbb{K}^n$ hat zwei mögliche Beschreibungen

- **Durch lineare Gleichungen**:

$$L = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax + b = 0\} \qquad \text{mit } A \in \mathbb{K}^{m \times n} \text{ eine Matrix.}$$

  Der assoziierte Untervektorraum zu L ist denn

$$L_0 = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} = \operatorname{Ker} A$$

  Normalerweise (z. B. in Übungen oder in der Prüfung) wollen wir eine **minimale Menge von Gleichungen**, also $n-k$ Gleichungen, wobei $k = \dim L$. Das bedeutet dass A eine $(n-k) \times n$ Matrix mit Rang $n-k$ ist.

- **Durch eine Parametrisierung**:

$$L = \{t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k + P \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{K}\}, \qquad \text{mit } v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{K}^n \text{ und } P \in L$$

  Der assoziierte Untervektorraum zu L ist denn

$$L_0 = \{t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k + P \mid t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{K}\}$$

  Normalerweise (z. B. in Übungen oder in der Prüfung) wollen wir eine **minimale Parametrisierung**, was bedeutet, dass die $u_1, \ldots, u_k$ eine Basis von L_0 sind, so dass $k = \dim L_0 = \dim L$.

Wenn wir eine Darstellung durch Gleichungen haben, ist es einfach, eine minimale Menge von Gleichungen durch das Gauß-Algorithmus zu erhalten

Von Gleichungen zu minimale Gleichungen: Sei $L = \{Ax + b\} = \{Ax = -b\}$. Wir können eine minimale Menge von Gleichungen für L wie folgt finden:

1) Wir bringen die Matrix $(A|-b)$ mit elementaren Zeilenumformungen in einer Matrix $(A'|-b')$ in (reduzierte) Zeilenstufenform.
2) Wir können $\operatorname{Rang}(A')$ und $\operatorname{Rang}(A'|-b')$ berechnen. Wenn $\operatorname{Rang}(A') \neq \operatorname{Rang}(A'|-b')$, dann $L = \emptyset$ und wir sind fertig.
3) Wenn $\operatorname{Rang}(A') = \operatorname{Rang}(A'|-b')$. Dann $\dim L = n - \operatorname{Rang} A$, und $L = \{A'x + b' = 0\}$ ist eine Beschreibung von L durch eine minimale Menge von $n - \dim L$ Gleichungen.

Aufgabe 1: Finden Sie eine minimale Menge von Gleichungen für den affinen Unterraum

$$L = \left\{ \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 1 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 1 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2 &= 0 \end{aligned} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Lösung: Wir bringen die erweiterte Matrix in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & | & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z1 \leftrightarrows Z2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z3 \to Z3-3Z1]{Z2 \to Z2-2Z1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & | & -1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z3 \to Z3-Z2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Wir sehen dass der Rang mit oder ohne der letzten Spalte immer 2 ist. Das bedeutet dass $\dim L = 4 - 2 = 2$ und dass

$$L = \begin{Bmatrix} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 1 & = 0 \\ -5x_2 - x_3 - 3x_4 + 1 & = 0 \end{Bmatrix}$$

eine minimale Beschreibung von L durch Gleichungen ist.

Von einer Parametrisierung zu einer minimale Parametrisierung: Sei $L = \{t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k + P \,|\, t_i \in \mathbb{K}\}$. Wir finden eine minimale Parametrisierung wie folgt:

1) Wir betrachten die Matrix $C = (v_1 | \ldots | v_k) \in \mathbb{K}^{n \times k}$, die die v_i als Spaltenvektoren hat.

2) Wir bringen die Matrix C mit elementare Zeilenumformungen in einer Matrix C' in Zeilenstufenform. Insbesondere $r = \mathrm{Rang}(C') = \dim L$.

3) Wenn C' pivots in den Spalten $j_1, \ldots, j_r$ hat, dann sind $v_{j_1}, \ldots, v_{j_r}$ eine Basis von L_0, so dass
$$L = \{t_{j_1} v_{j_1} + \cdots + t_{j_r} t_{j_r} + P \,|\, t_{j_1}, \ldots, t_{j_r} \in \mathbb{K}\}$$
eine minimale Parametrisierung von L ist.

Aufgabe 2: Sei

$$L = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^3$$

Finden Sie eine minimale Parametrisierung von L.

Lösung: Wir anwenden das Algorithmus

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z3 \to Z3-3Z1]{Z2 \to Z2-2Z1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z3 \to Z3-2Z2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist in Zeilenstufenform und hat Pivots in der Spalten 1 und 2. Das zeigt dass $\dim L = 2$ und dass

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von L_0 ist. Insbesondere bekommen wir eine minimale Parametrisierung von L als

$$L = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^3$$

Wir werden nun zwei Methoden vorstellen, um mit Hilfe des Gauß-Algorithmus von einer Darstellung zur anderen zu wechseln. Es ist wichtig zu beachten, dass die von uns vorgestellten Methoden nur zwei der möglichen Methoden sind. Insbesondere im Fall von Geraden in $\mathbb{K}^2$ war die "Brute Force" eine Methode, die funktionierte. Diese Methode ist in anderen Fällen zu kompliziert, so dass von ihrer Anwendung abgeraten wird.

Von Gleichungen zu einer Parametrisierung: Sei $L = \{Ax + b = 0\} = \{Ax = -b\}$. Wir können eine minimale Parametrisierung von L wie folgt finden:

1) Wir bringen die Matrix $(A|-b)$ mit elementaren Zeilenumformungen in einer Matrix $(A'|-b')$ in reduzierte Zeilenstufenform.

2) Wir können $\operatorname{Rang}(A')$ und $\operatorname{Rang}(A'|-b')$ berechnen. Wenn $\operatorname{Rang}(A') \neq \operatorname{Rang}(A'|-b')$, dann $L = \emptyset$ und wir sind fertig.

3) Wenn $\operatorname{Rang}(A') = \operatorname{Rang}(A'|-b')$, dann $P = -b'$ ist ein Punkt in L und L selbst hat Dimension $k = n - \operatorname{Rang}(A')$.

4) Wir verwenden die Gleichungen $A'x = 0$, um die Variablen x_i, die den Pivots von A' entsprechen, in Form der anderen Variablen zu schreiben.

5) Dies ergibt eine Basis $v_1, \ldots, v_k$ von $L_0 = \{Ax = 0\}$.

6) Wir haben eine minimale Parametrisierung $L = \{t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k + P \mid t_i \in \mathbb{K}\}$

Aufgabe 3: Finden Sie eine minimale Parametrisierung für den affinen Unterraum

$$L = \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 1 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 1 & = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - 3 & = 0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^4$$

Lösung: Wir anwenden das Algorithmus

$$(A|-b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z3 \to Z3 - 3Z1]{Z2 \to Z2 - Z1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z3 \to Z3 - Z2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z2 \to -\frac{1}{2}Z2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z1 \to Z1 - Z2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist in reduzierter Zeilenstufenform mit Pivots in den Spalten 1 und 2. Wir schreiben das lineare System, das dieser Matrix entspricht, und wir schreiben die Variablen x_1, x_2 durch die anderen

$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = 1 \\ x_2 - x_4 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & = -x_3 + 1 \\ x_2 & = x_4 \end{cases}$$

So dass $x \in L$ genau dann, wenn

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 + 1 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis vom assoziierten Untervektorraum L_0.

Von einer Parametrisierung zu Gleichungen: Sei $L = \{t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k + P \mid t_i \in \mathbb{K}\}$. Wir finden eine minimale Beschreibung von U durch Gleichungen wie folgt:

1) Wir betrachten die Matrix $C = (v_1 | \dots | v_k) \in \mathbb{K}^{n \times k}$, die die v_i als Spaltenvektoren hat. Wir betrachten $t = (t_1, \dots, t_k)^T \in \mathbb{K}^{k \times 1}$ als ein Spaltenvektor von Variabeln. Dann
$$L = \{x \mid Ct + P = x \text{ für ein } t \in \mathbb{K}^k\} = \{x \mid Ct = x - P \text{ hat eine Lösung } t \in \mathbb{K}^k\}$$
2) Wir betrachten die erweiterte Matrix $(C|x - P)$ und wir bringen sie mit elementare Zeilenumformungen in einer Matrix $(C'|x')$ womit C' Zeilenstufenform hat. Die Matrix C' hat $\mathrm{Rang}(C') = \dim L$ und die erste $\mathrm{Rang}(C')$ Zeilen von C' sind nicht null, alle andere sind null.
3) Eine minimale Menge von Gleichungen für L erhält man, indem man die letzten $(n - \mathrm{rk}(C'))$-Einträge von x' auf Null setzt. Dies sind die Einträge, die den Nullzeilen von C' entsprechen.
4) Als Nebenprodukt können wir auch eine Basis von L_0 finden: wenn C' Pivots in den Spalten $j_1, \dots, j_r$ hat, dann sind die ursprünglichen Vektoren $v_{j_1}, \dots, v_{j_r}$ eine Basis von L_0.

Aufgabe 4 Finden Sie eine minimale Beschreibung durch Gleichungen für den affine Unterraum

$$L = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 2i \\ i \\ 0 \\ 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \mid t_i \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{C}^4$$

Lösung: Wir wenden die elementare Zeilenumformungen auf die erweiterte Matrix an

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2i & | & x_1 \\ 0 & 1 & i & | & x_2 - i \\ -1 & 1 & 0 & | & x_3 + i \\ 2 & 1 & 3i & | & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z4 \to Z4 - 2Z1]{Z3 \to Z3 + Z1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2i & | & x_1 \\ 0 & 1 & i & | & x_2 - i \\ 0 & 2 & 2i & | & x_1 + x_3 + i \\ 0 & -1 & -i & | & -2x_1 + x_4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z4 \to Z4 + Z2]{Z3 \to Z3 - 2Z2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2i & | & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & | & x_2 - i \\ 0 & 0 & 0 & | & x_1 - 2x_2 + x_3 + 3i \\ 0 & 0 & 0 & | & -2x_1 + x_2 + x_4 - i \end{pmatrix}$$

Sei C' diese Matrix ohne die letzte Spalte. Die Matrix C' ist in Zeilenstufenform, $\mathrm{Rang}(C') = 2$, und die letzte 2 Zeilen von C' sind null. Das bedeutet dass eine minimale Menge von Gleichungen für L ist

$$L = \left\{ \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3i &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 - i &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Diese Methoden können auch zur Lösung anderer Probleme verwendet werden, z. B.

Durchschnitt zweier affinen Unterräume: Beispiele 1.2.23, 1.2.24, 1.2.25 im Skript.

Der affine Unterraum, der durch zwei Unterräume erzeugt wird: Proposition 1.2.33, Beispiel 1.2.34 und Beispiel 1.2.35 im Skript.
