1. Wir berechnen Doppelverhältnisse

$$\begin{aligned}(P_1, P_2; P_3, P_4) &= \frac{(i-1)((2i-2)}{(i-2)(2i-1)} = \frac{-4i}{-5i} = \frac{4}{5} \\ (Q_1, Q_2; Q_3, Q_4) &= (Q_3, Q_4; Q_1, Q_2) \\ &= \frac{Q_1 - Q_3}{Q_1 - Q_4} = \frac{-1-i}{i} = (-i)(-1-i) = 1 + i.\end{aligned}$$

Die Doppelverhältnisse sind verschieden, also sagt Proposition 2.4.28, dass es keine solche proj. Transformation gibt.

2. Betrachte das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & x_0 \\ 0 & 1 & -1 & | & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & | & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & | & x_3 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren Zeile 1 von Zeile 4. Dann addieren wir die zweite Zeile zur vierten. Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & x_0 \\ 0 & 1 & -1 & | & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & | & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & | & x_3 - x_0 + x_1 \end{pmatrix}$$

Die linke Seite ist jetzt in Zeilenstufenform. Also ist der Spaltenrang der linken Seite 2 und L hat Dimension 1. Minimale Gleichungen sind $x_2 = x_3 - x_0 + x_1 = 0$.

3. Der Punkt $P = (1, 0, 0, 0)^T$ ist in L und $Q = (2, 0, -1, 0)^T$ ist in H. Wir bemerken, dass $L_0 = \langle (1, 0, 0, 0)^T \rangle$ gilt. Außerdem rechnet man nach, dass

$$H_0 = \{x_1 - x_2 = x_3 + x_4 = 0\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Im folgenden seien $v_1 = (1, 0, 0, 0)^T, v_2 = (1, 1, 0, 0)^T, v_3 = (0, 0, 1, -1)^T, w = P - Q = (-1, 0, 1, 0)^T$. Wir berechnen eine orthogonale Projektion.

$$\begin{aligned}\pi_{(L_0+H_0)^\perp}(w) &= w - \frac{\langle v_1, w \rangle}{\langle v_1, v_2 \rangle} - \frac{\langle w, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} - \frac{\langle v_3, w \rangle}{\langle v_3, v_3 \rangle} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-1)}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Also ist $d(L, H) = \|\pi_{(L_0+H_0)^\perp}(w)\| = \sqrt{1} = 1$.

4. Angenommen es gäbe solch eine Isometrie. Schreibe $f(x) = Ax + v$, wobei $A \in O_3(\mathbb{R})$ und $v \in \mathbb{R}^3$ ist. Es gilt $f(P_j - P_1) = Q_j - Q_1$ für $j = 2, 3$. Da A orthogonal ist, muss der Winkel zwischen $P_2 - P_1$ und $P_3 - P_1$ gleich dem Winkel zwischen $Q_2 - Q_1$ und $Q_3 - Q_1$ sein. Wir haben $P_1 - P_1 = (2, 1, 0), P_3 - P_1 = (0, 2, 1), Q_2 - Q_1 = (1, 2, 0), Q_3 - Q_1 = (0, 2, 1)$. Jetzt berechnen wir den Kosinus der Winkel:

$$\frac{\langle P_2 - P_1, P_3 - P_1 \rangle}{\|P_2 - P_1\| \cdot \|P_3 - P_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}}$$
$$\frac{\langle Q_2 - Q_1, Q_3 - Q_1 \rangle}{\|Q_2 - Q_1\| \cdot \|Q_3 - Q_1\|} = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{5}}$$

5. Wir wählen Punkte $P_1 = [1, 1, 0], P_2 = [0, 0, 1] \in L$ und $Q_1 = [1, 1, 0], Q_2 = [1, 0, 1] \in M$. Wir finden $f = [F]$ mit $f(P_i) = Q_i$ und $F \in GL_3(\mathbb{R})$. Wir führen folgende Basen ein:

$$A = (e_1, e_2, e_3),$$
$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$
$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Wir suchen eine Matrix F, die die Basis B auf die Basis C schickt:

$$F = M_A^C M_B^A = M_A^B \left(M_A^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Falls $P \in L$, so gilt $\{P\} \cap L = \{P\}$ gilt. Wir schreiben $P = [v]$. Wir bemerken, dass der Kern von $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1' & b_2' & b_3' \end{pmatrix}$ der Unterraum erzeugt von v ist. Da A einen nicht trivialen Kern hat, gilt $\det A = 0$.

   Umgekehrt sei die Determinante gleich 0. Die Matrix hat Rang ≤ 2. Da die Gleichungen mit $\sum b_i x_i = \sum b_i' x_i = 0$ einen Punkt definiern, sind Zeile 2 und Zeile 3 linear unabhängig sind. Also muss Zeile 1 im Erzeugnis von Zeile 2 und Zeile 3 sein. Also erfüllt v auch die Gleichung $\sum a_i v_i = 0$ und P lieft in L.