Geometrie

Daniele Agostini

21. November 2024

Vorwort

Dieses Skript ist noch in Arbeit. Falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir diese (auch die offensichtlichen) bitte mit!

Die mit ($\star$) gekennzeichneten Teile sind fortgeschrittene Kommentare und nicht Bestandteil der Vorlesungen.

Hinweis fürs Lernen: Mathematik kann man nur lernen, indem man sie tut, und nicht nur durch Lesen oder Zuhören von Vorlesungen. Das heißt, auch wenn es natürlich notwendig ist, die Beweise zu lesen und sie zu verstehen, findet das eigentliche Lernen statt, wenn man versucht, den Beweis selbst zu wiederholen.

Die nützlichste Technik, die ich kenne, um die Theorie zu lernen, ist folgende: nachdem man die Theoreme und Bemerkungen aus dem Skript oder den Notizen gelesen hat, versucht man, den Beweis auf einem weißen Blatt Papier (oder auf einer Tafel,...) zu wiederholen, ohne dabei auf das Skript oder die Notizen zu schauen. Das Gleiche gilt für die Übungen und die Beispiele, die im Unterricht oder in den Notizen besprochen wurden, oder für die Übungsblätter.

Sie können das Ganze noch effektiver gestalten, wenn Sie es gemeinsam mit jemandem machen: Anstatt den Beweis nur für sich selbst umzuschreiben, versuchen Sie, ihn vor einer anderen Person zu machen und ihr alle Schritte zu erklären (die andere Person kann gerne Fragen stellen). Dann kann die andere Person Ihnen etwas anderes erklären.

Wichtig ist auch, dass Sie dabei die Aussagen, Beweise und Lösungen so genau wie möglich aufschreiben. Ich finde es hilfreich, ganze grammatikalisch korrekte Sätze zu schreiben.

Was ich oben geschrieben habe, bezieht sich auf eine Studienmethode, und ich denke, es gilt auch für viele andere Fächer. Ein weiterer Tipp, der sich vielleicht eher auf die Mathematik bezieht, ist folgender: Wenn Sie eine Aussage und ihren Beweis lernen, versuchen Sie zu verstehen, wo jede der Hypothesen verwendet wird, und fragen Sie sich, ob die Hypothesen wirklich notwendig sind. Eine gute Möglichkeit, dies zu tun, besteht darin, Gegenbeispiele zu finden, wenn eine der Hypothesen fallen gelassen wird.

Das ist natürlich sehr zeitaufwändig, und da Mathematik ein recht dichtes Thema ist, dauert es nicht selten sehr lange, ein paar Seiten des Skripts auf diese Weise durchzugehen. Nach einer Weile werden Sie jedoch feststellen, dass dies einfacher (und etwas weniger zeitaufwendig) wird, und Sie werden vielleicht selbst auf Beweise oder Lösungen kommen, die sich von denen unterscheiden, die wir im Unterricht besprochen haben.

Viel Erfolg!

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Affine Geometrie

1.1 Die affine Ebene

Definition 1.1.1 (Affine Ebene)**.** Die affine Ebene is die Menge $\mathbb{R}^2$.

Elementen in $\mathbb{R}^2$ sind Spaltenvektoren $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Manchmal schreiben wir auch $(x\, y)^t$, und auch wenn dass nicht korrekt ist, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Aber wir sollen immer im Kopf behalten dass die Elementen in $\mathbb{R}^2$ Spaltenvektoren sind (und nicht Zeilenvektoren).

Definition 1.1.2 (Punkten und Geraden)**.** Ein Punkt in $\mathbb{R}^2$ ist einfach ein $P \in \mathbb{R}^2$. Eine Gerade ist eine Teilmenge $L \subseteq \mathbb{R}^2$ so dass

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, ax + by + c = 0\}$$

für manche $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \neq 0$. Manchmal werden wir einfach

$$L = \{ax + by + c = 0\}$$

schreiben. Wenn P ein Punkt und L eine Linie ist, so dass $P \in L$, sagt man auch, dass L durch P geht oder dass P auf L liegt.

Beispiel 1.1.3. Man sollte die Geraden $\{x = 0\}, \{y = 0\}, \{y = 1\}$ und $\{x + y = 2\}$ an der Tafel skizzieren.

Lemma 1.1.4. *Die folgende sind äquivalent:*

1. *Geraden $L \subseteq \mathbb{R}^2$ die durch 0 gehen.*
2. *Geraden $L \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Gleichung $L = \{ax + by = 0\}$.*
3. *Untervektorräume $L \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Dimension 1.*

Beweis. (1) $\implies$ (2): Sei $L = \{ax + by + c = 0\}$ eine Gerade, die durch 0 geht. Dann $0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = c$. Das bedeutet dass $L = \{ax + by = 0\}$.

(2) $\implies$ (3): Sei $L = \{ax + by = 0\}$, mit $(a, b) \neq 0$. Wir betrachten die Matrix $(ab) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ und wir sehen dass $L = \mathrm{Ker}(ab)$. Das zeigt dass L ein Untervektorraum ist. Außerdem, hat die Matrix Rang 1 (weil die Matrix nicht null ist) so dass $\dim L = \dim \mathrm{Ker}(ab) = 2 - \mathrm{Rang}(ab) = 2 - 1 = 1$.

(3) $\implies$ (1): Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Untervektorraum mit $\dim U = 1$. Sei $v_0 = (x_0, y_0) \in U$, $v_0 \neq 0$. Dann ist v_0 eine Basis von U, weil U Dimension 1 hat:

$$U = \{(t \cdot x_0, t \cdot y_0) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

Wir wollen zeigen dass

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y_0 \cdot x - x_0 \cdot y = 0\}$$

Wenn $(t \cdot x_0, t \cdot y_0) \in U$, dann $y_0(t \cdot x_0) - x_0 \cdot (t \cdot y_0) = t \cdot x_0 y_0 - t \cdot x_0 y_0 = 0$. Andererseits, sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ so dass $y_0 \cdot x - x_0 \cdot y = 0$. Das bedeutet $y_0 \cdot x = x_0 \cdot y$ und wir wissen auch dass $x_0 \neq 0$ oder $y_0 \neq 0$. Nehmen wir an, dass $x_0 \neq 0$: dann $y = \frac{y_0 \cdot x}{x_0}$, so dass

$$(x, y) = (x, \frac{x}{x_0} \cdot y_0) = (\frac{x}{x_0} \cdot x_0, \frac{x}{x_0} \cdot y_0) \in U$$

. □

In der affinen Ebene haben wir Translationen

Definition 1.1.5 (Translation oder Parallelverschiebung)**.** Sei $v \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor. Die Translation durch v ist die Abbildung

$$t_v \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, P \mapsto P + v$$

Wenn $X \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge ist, schreiben wir

$$X + v = t_v(X) = \{P + v \,|\, P \in X\}$$

Bemerkung 1.1.6. ($\star$) Man sieht leicht dass:

1. $t_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$
2. $t_v \circ t_u = t_{v+u}$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^2$.

Das bedeutet, dass die Translationen eine Operation der additiven Gruppe $(\mathbb{R}^2, +)$ auf die Menge $\mathbb{R}^2$ ergeben. Insbesondere sind alle Translationen invertierbar und

$$t_v^{-1} = t_{-v} \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^2$$

Diese Gruppenoperation hat auch zusatzliche Eigenschaften:

1. $t_v = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ genau dann, wenn $v = 0$.
2. für zwei beliebige Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^2$ existiert $v \in \mathbb{R}^2$ so dass $P = t_v(Q) = Q + v$.

Dies bedeutet, dass die Operation frei und transitiv ist.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 15.10.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Lemma 1.1.7. *Sei $L = \{ax + by + c = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade.*

1. *Eine Translation von L ist eine Gerade: sei $v = (v_x\ v_y)^t \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor, dann*

$$L + v = \{a(x - x_v) + b(y - y_v) + c = 0\} = \{ax + by + (c - ax_v - by_v) = 0\}$$

2. *Es gibt eine einzige gerade $L_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ durch* 0 *so dass L eine Translation von L_0 ist: $L = L_0 + v$ für ein $v \in \mathbb{R}^2$. Diese Gerade ist*

$$L_0 = \{ax + by = 0\}$$

3. *Es gilt dass $L = L_0 + v$ genau dann, wenn $v \in L$.*

Beweis. 1. Wir sehen dass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in L + v \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - v \in L \iff \begin{pmatrix} x - x_v \\ y - y_v \end{pmatrix} \in L \iff a(x - x_v) + b(y - y_v) + c = 0$$

und das ist genau was wir zeigen wollten.

2. Wir zeigen zuerst dass L nicht leer ist. Ein Punkt in L ist eine Lösung des lineares Gleichungssytems $(a\, b)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = -c$. Da die Matrix $(a\, b)$ Rang 1 hat. Hat diese System immer eine Lösung. Sei denn $v = \left(\begin{smallmatrix} v_x \\ v_y \end{smallmatrix}\right) \in L$: das bedeutet dass $ax_v + by_v + c = 0$, oder $c = -azx_v - by_v$. Sei $L_0 = \{ax + by = 0\}$. Wir zeigen dass $L = L_0 + v$, mit Punkt (1):

$$L_0 + v = \{a(x - x_v) + b(y - y_v) = 0\} = \{ax + by + (-ax_v - by_v) = 0\} = \{ax + by + c = 0\} = L$$

Sei nun $L_0' \subseteq \mathbb{R}^2$ eine andere Gerade durch 0 so dass $L = L_0' + v'$ für ein $v \in \mathbb{R}^2$. Da L_0' eine Translation von L ist, sehen wir dass $L_0' = \{ax + by + c' = 0\}$ (die a, b Koeffizienten sind die selbe von L), und da L_0' durch 0 geht, sehen wir dass $c' = 0$. Dann $L_0 = L_0'$.

3. Wenn $v \in L$, haben wir schon gezeigt dass $L = L_0 + v$. Andererseits, wenn $L = L_0 + v$, dann $v = 0 + v \in L$, da $0 \in L_0$.

□

Definition 1.1.8 (Untervektorraum einer Gerade)**.** Sei $L \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade. Die einzige Gerade $L_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ durch 0 so dass L eine Translation von L_0 ist, ist der zu L assoziierte Untervektorraum oder die zu L_0 assoziierte Gerade durch 0.

Bemerkung 1.1.9. Sei $L \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade. Die assoziierte Gerade durch 0 ist eindeutig. Die Translation so dass $L = L_0 + v$ ist aber nicht eindeutig: alle $v \in L$ sind gut. Zum Beispiel, man soll die Geraden $L = \{x + 2y = 2\}, L_0 = \{x + 2y = 0\}$ skizzieren, und sehen dass

$$L = L_0 + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = L_0 + \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = L_0 + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1/2 \end{smallmatrix}\right)$$

Bemerkung 1.1.10 (Beschreibung einer Gerade durch Gleichungen oder durch eine Parametrisierung)**.** Wir haben gesehen dass jede Gerade eine Translation einer Gerade durch 0 ist. Jede Gerade durch 0 ist auch ein Untervektorraum $L_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Dimension 1, und so ein Untervektorraum hat zwei Darstellungen:

- **Gleichungen:** $L_0 = \{ax + by = 0\}$ mit $(a, b) \neq 0$
- **Parametrisierung:** $L_0 = \{(tx_0, ty_0) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ mit $(x_0, y_0) \neq 0$.

Dann hat auch jede Gerade $L = L_0 + v$, mit $v = (v_x, v_y)$ zwei Darstellungen:

- **Gleichungen:** $L = \{a(x - x_v) + b(y - y_v) = 0\} = \{ax + by + c = 0\}$ für $(a, b) \neq 0$.

- **Parametrisierung:** $L = \{(tx_0 + v_x, ty_0 + v_y) \mid t \in \mathbb{R}\}$ mit $(x_0, y_0) \neq 0$

Beispiel 1.1.11. Zum Beispiel nehmen wir die Gerade $L = \{3x + 5y - 8 = 0\}$. Wir wollen eine Parametrisierung von L finden. Die assoziierte Gerade durch 0 ist $L_0 = \{3x + 5y = 0\}$ und sie hat eine Parametrisierung $L_0 = \{(5t, -3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Wir sehen auch dass $(1, 1) \in L$, so dass $L = L_0 + \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) = \{(5t + 1, -3t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Andererseits, betrachten wir die Gerade $L = \{(t-2, t+2) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Wir wollen eine Gleichung für L finden. Die assoziierte Gerade durch 0 ist $L_0 = \{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ und diese hat Gleichung $L_0 = \{x - y = 0\}$. Dann hat L Gleichung $L = \{x - y + c = 0\}$. Um c zu finden, sehen wir dass $(0 - 2, 0 + 2) = (-2, 2) \in L$, so dass $-2 - 2 + c = 0$. Das bedeutet dass $c = 4$, so dass $L = \{x - y + 4 = 0\}$.

Definition 1.1.12 (Parallele Geraden)**.** Zwei Geraden sind parallel wenn sie denselben assoziierten Untervektorraum (oder Gerade durch 0) haben.

Proposition 1.1.13. *Seien $L, L' \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Geraden.*

1. *L, L' sind parallel genau dann, wenn eine eine Translation der anderen ist: $L' = L + v$ für ein $v \in \mathbb{R}^2$.*

2. *$L, L' \subseteq \mathbb{R}^2$ sind parallel genau dann, wenn sie entweder gleich oder disjunkt sind: entweder $L = L'$ oder $L \cap L' = \emptyset$.*

Beweis.

1. ($\Longrightarrow$) Wenn L, L' parallel sind, dann haben sie dieselbe assoziierte Gerade durch 0. Sei L_0 diese Gerade, dann $L = L_0 + w$ und $L' = L_0 + w'$ für Vektoren $w, w' \in \mathbb{R}^2$. Dann $L' = L_0 + w' = (L - w) + w' = L + (w' - w)$ so dass L' eine Translation von L ist.

   ($\Longleftarrow$) wenn $L' = L + v$ für ein Vektor $v \in \mathbb{R}^2$, sei L_0 die Gerade durch 0 die assoziierte zu L ist und sei $w \in L$. Dann $L = L_0 + w$ so dass $L' = L + v = L_0 + w + v = L_0 + (w + v)$. Das zeigt dass L_0 auch die Gerade assoziierte zu L' ist, so dass L und L' parallel sind.

2. ($\Longrightarrow$) Seien L, L' zwei parallele Geraden und sei $L_0 = \{ax + by = 0\}$ die Gerade durch 0 die zu L, L' assoziert ist. Dann haben L und L' Gleichungen der Form $L = \{ax+by+c = 0\}$ und $L' = \{ax + by + c' = 0\}$ für $c, c' \in \mathbb{R}$. Wenn $c = c'$, dann $L = L'$. Andererseits, wenn $c \neq c'$, wollen wir zeigen dass $L \cap L' = \emptyset$. Sei $(x, y) \in L \cap L'$: dann $ax+by+c = 0 = ax+by+c'$ so dass $c = c'$, Widerspruch.

   Wir können auch geometrisch denken: nehmen wir an dass L, L' parallel sind und dass $L \cap L' \neq \emptyset$. Wir wollen zeigen dass $L = L'$. Sei $v \in L \cap L'$ und sei $L_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ der assoziierter Untervektorraum zu beide L und L'. Da $v \in L$, wissen wir dass $L = L_0 + v$ und da $v \in L'$, wissen wir dass $L' = L_0 + v$. Das zeigt dass $L = L'$.

   ($\Longleftarrow$) Wenn $L = L'$ dann haben L, L' die selbe assoziierte Gerade durch 0. Nehmen wir an dass $L \cap L' = \emptyset$. Wir wollen zeigen dass L, L' parallel sind: wir schreiben $L = \{ax + by + c = 0\}$ und $L' = \{a'x + b'y + c' = 0\}$, und die Annahme $L \cap L' = \emptyset$ bedeutet dass das System

$$\begin{cases} ax + by &= -c \\ a'x + b'y &= -c' \end{cases}$$

   keine Lösung hat. Insbesondere, es muss sein dass

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$$

und das bedeutet dass die Zeilen von der Matrix linear abhängig sind. Da beide Zeilen von der Matrix nicht null sind (Warum?), wissen wir denn, dass $(a', b') = (\lambda a, \lambda b)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir betrachten jetzt die Graden L_0, L_0' durch 0 die assoziierte zu L, L' sind. Wir wissen dass $L_0 = \{ax + by = 0\}$ und $L_0' = \{a'x + b'y = 0\} = \{\lambda ax + \lambda by = 0\}$, so dass

$$L_0' = \{(x, y) \mid \lambda ax + \lambda by = 0\} = \{(x, y) \mid \lambda(ax + by) = 0\} = \{(x, y) \mid ax + by = 0\} = L_0$$

Das zeigt dass L, L' parallel sind.

$\square$

Definition 1.1.14 (Inzidenz)**.** Zwei Geraden L, L' sind inzident wenn L und L' nicht disjunkt sind: $L \cap L' = \emptyset$.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 17.10.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Bemerkung 1.1.15. Proposition 1.1.13 zeigt dass zwei verschiedene Geraden L, L' sind enweder parallel oder inzident. Wir sehen auch dass zwei gleiche Geraden L, L' sind gleichzeitig parallel und inzident.

Wir zeigen nun, dass Punkte und Geraden einige natürliche Eigenschaften erfüllen:

Satz 1.1.16.
1. *Für zwei verschiedene Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^2$ gibt es eine einzige Gerade, die durch P, Q geht.*
2. *Jede Gerade $L \subseteq \mathbb{R}^2$ enthält mindestens zwei verschiedene Punkte P, Q.*
3. *Es gibt drei nicht-kollineare Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$: d.h. dass P, Q, R nicht auf eine Gerade liegen.*
4. *Seien L eine Gerade und P ein Punkt so dass $P \notin L$. Dann existiert eine einzige Gerade L' durch P so dass $L \cap L' = \emptyset$.*

Beweis.
1. Wir geben zuerst einen "algebraischen" Beweis. Seien $P = (x_P, y_P)$ und $Q = (x_Q, y_Q)$ die zwei Punkte. Eine Gerade $L = \{ax + by + c = 0\}$ geht durch beide P, Q genau dann, wenn
$$\begin{cases} ax_P + by_P + c &= 0 \\ ax_Q + by_Q + c &= 0 \end{cases}$$
Wir können das als lineares System schreiben:
$$\begin{pmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$
und wir wollen eine Lösung finden, mit $(a, b) \neq (0, 0)$. Wir sehen dass die Matrix Rang 2 hat: sonst sind die Zeilenvektoren linear abhängig, so dass $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit
$$\lambda \cdot (x_P \; y_P \; 1) = (x_Q \; y_Q \; 1)$$

aber das bedeutet $\lambda = 1$, und dann $x_P = x_Q$ und $y_P = y_Q$. Das ist ein Widerspruch weil $P \neq Q$. Da die Matrix Rang 2 hat, wissen wir dass der Kern dimension 1 hat, so dass $(a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{R}^3, (a_0, b_0, c_0) \neq 0$ existiert, so dass alle Lösungen des Systems die Form

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_0 \\ \lambda \cdot b_0 \\ \lambda \cdot c_0 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

haben. Insbesondere, sehen wir dass $(a_0 b_0) \neq 0$, sonst zeigt das lineares System dass $c_0 = 0$ auch, so dass $(a_0, b_0, c_0) = 0$. Am Ende dieser Diskussion, haben wir eine Gerade $L = \{a_0 x + b_0 y + c_0 = 0\}$ gefunden so dass $P, Q \in L$. Sei nun L' eine andere Gerade so dass $P, Q \in L'$. Die Diskussion zeigt dass L' die Form $L' = \{\lambda \cdot a_0 x + \lambda \cdot b_0 y + \lambda \cdot c_0 = 0\}$ hat, für ein $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ (Warum gilt $\lambda \neq 0$?). Dann $L' = L$, so dass es gibt eine einzige Gerade die durch P, Q geht.

Wir können auch einen "geometrischen" Beweis geben: seien $P, Q \in \mathbb{R}^2$ zwei verschiedene Punkte. Mit Hilfe von Translationen sehen wir dass Geraden durch P, Q den Geraden durch 0 und $Q - P$ entsprechen: wenn L eine Gerade durch P, Q ist, dann ist $L - Q$ eine Gerade durch 0 und $Q - P$. Wir müssen nun zeigen dass eine einzige Gerade durch 0 und $v = Q - P$ existiert. So eine Gerade ist ein eindimensionaler Untervektorraum $L_0 \subseteq \mathbb{R}^2$, der v enthält. Dieser Untervektorraum ist eindeutig: er ist der Untervektoraum erzeugt von v: $L_0 = \{t \cdot v \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ (Wo haben wir benutzt dass $P \neq Q$?).

2. Sei L eine Gerade und sei L_0 die assoziierte Gerade durch 0. Wir wissen dass L eine Translation von L_0 ist, so dass L mindestens zwei verschiedene Punkte enthält, genau dann wenn, dasselbe für L_0 gilt. Wir können annehmen dass L_0 eine Gerade durch 0 ist. Das bedeutet dass L_0 ein Untervektorraum mit Dimension 1 ist, so dass L_0 enthält $0 \in L_0$ und ein $v \in L_0, v \neq 0$.

3. Wir betrachten die drei Puntke $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$. Wir zeigen dass diese drei Punkte nicht kollinear sind.

   Wir geben zuerst einen "algebraischen" Beweis: sei $L = \{ax + by + c = 0\}$ eine Gerade die alle drei Punkte enthält. Dann

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c &= 0 \\ a \cdot 1 + b \cdot 0 + c &= 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c &= 0 \\ a + c &= 0 \\ b + c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c &= 0 \\ a &= 0 \\ b &= 0 \end{cases}$$

   und das ist ein Widerspruch, weil dann L keine Gerade ist.

   Wir können auch einen "geometrischen" Beweis geben: sei L eine Gerade die alle drei Punkte enthält. Da L durch 0 geht, muss L ein eindimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ sein. Da aber L zwei lineare unabhängige Vektoren $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ enthält, muss $\dim L \geq 2$, Widerspruch.

4. Wir geben zuerst ein "algebraischen" Beweis. Seien $L = \{ax + by + c = 0\}$ eine Gerade, und $P = (x_P, y_P)$ ein Punkt so dass $P \notin L$. Sei L' eine andere Gerade. Wir sehen dass $L \cap L' = \emptyset$ genau dann, wenn L' parallel zu L ist. Wir mussen also zeigen dass eine einzige Gerade L' durch P existiert, die parallel zu L ist. Die Gerade L' ist parallel zu L genau

dann, wenn $L' = \{ax + by + c' = 0\}$ für ein $c' \in \mathbb{R}$. Außerdem $P \in L'$ genau dann, wenn $c' = -ax_P - by_P$, so dass c' eindeutig bestimmt ist.

Wir können auch ein "geometrischen" Beweis geben. Wie im müssen wir zeigen, dass es eine einzige Gerade L' parallel zu L gibt, die durch P geht. Sei $Q \in L$ und sei $L' = L + (P - Q)$: wir sehen dass L' parallel zu L ist und dass $P = Q + (P - Q) \in L'$. Sei L'' eine andere Gerade durch P, die parallel zu L ist. Dann sind L', L'' parallel und inzident, so dass $L' = L''$.

□

Definition 1.1.17 (Gerade erzeugt von zwei Punkte)**.** Seien $P, Q \in \mathbb{R}^2$ zwei verschiedene Punkte. Die einzige Gerade die durch P, Q geht nennen wir die Gerade die von P und Q erzeugt ist und bezeichnen wir sie mit $L(P, Q)$.

Eine Gerade durch zwei Punkte hat eine einfache Parametrisierung:

Proposition 1.1.18. *Seien $P, Q \in \mathbb{R}$ zwei verschiedene Punkte. Die Gerade $L(P, Q)$ hat eine Parametrisierung*

$$L(P, Q) = \{tP + (1 - t)Q \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Beweis. Die Menge $L = \{tP + (1 - t)Q \mid t \in \mathbb{R}\}$ enthält P (für $t = 1$) und Q (für $t = 0$). Wir müssen zeigen dass L eine Gerade ist. Wir sehen dass $L = \{t(P - Q) + Q \mid t \in \mathbb{R}\}$ und das ist eine Gerade, weil $P - Q \neq 0$. □

Bemerkung 1.1.19. Eine wichtige Konsequenz des Satzes 1.1.16 ist, dass zwei Geraden, die sich in mindestens zwei Punkten treffen, dieselben sein müssen, weil sie beide mit der einzigen Linie übereinstimmen müssen, die durch diese Punkte geht.

1.1.1 Affine Transformationen

Wir haben Translationen eingeführt und benutzt, z.B. im Beweis des Satzes 1.1.16. Translationen sind ein besonderes Fall von affine Transformationen

Definition 1.1.20 (Affine Transformationen)**.** Eine affine Transformation oder Affinität auf $\mathbb{R}^2$ ist eine Abbildung

$$f_{A,b} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad P \mapsto AP + v$$

mit $A \in GL_2(\mathbb{R})$ eine invertierbare 2×2 Matrix und $v \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor. Wir bezeichnen die Menge aller affine Transformationen als $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$.

Bemerkung 1.1.21. Wir können eine affine Transformation auch explizit schreiben:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad f \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + v_x \\ cx + dy + v_y \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.1.22. Translationen $t_v \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto x + v$ sind affine Transformationen mit Matrix $A = I_2$. Lineare transformationen (d.h. invertierbare lineare Abbildungen) $A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax$ sind auch affine Transformationen mit Vektor $v = 0$. Eigentlich, sehen wir dass eine affine Transformation die Komposition einer invertierbare lineare Abbildung mit einer Translation ist: $f_{A,b} = t_v \circ A$ Insbesondere ist die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ eine affine Transformation $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} = f_{I_2,0}$.

Lemma 1.1.23. 1. *Die Komposition zweier affine Transformationen ist eine affine Transformation: seien $A, B \in GL_2(\mathbb{R})$ und $v, w \in \mathbb{R}^2$. Dann*

$$f_{A,v} \circ f_{B,w} = f_{AB,Aw+v}$$

2. *Affine Transformationen sind invertierbar: seien $A \in GL_2(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Dann*

$$f_{A,v}^{-1} = f_{A^{-1},-A^{-1}v}$$

3. *Die Menge $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ aller affine Transformationen ist eine Gruppe mit der Komposition.*

Beweis. 1. Wir berechnen

$$(f_{A,v} \circ f_{B,w})(P) = f_{A,v}(B \cdot P + w) = A(B \cdot P + w) + v = ABx + (Aw + v)$$

2. Punkt (1) zeigt dass

$$f_{A,v} \circ f_{A^{-1},-A^{-1}v} = f_{AA^{-1},A(-A^{-1}v)+v} = f_{I_2,0} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$$

und eine ähnliche Berechnung zeigt dass $f_{A^{-1},-A^{-1}v} \circ f_{A,v} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

3. Das folgt aus (1) und (2).

□

Bemerkung 1.1.24. ($\star$) Wir können auch die Struktur von $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ als Gruppe durch die Gruppe $GL_2(\mathbb{R})$ und die additive Gruppe $(\mathbb{R}^2, +)$ verstehen: es gibt ein surjektives Homomorphismus von Gruppen

$$\varphi\colon \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2) \to GL_2(\mathbb{R}), \qquad f_{A,v} \mapsto A$$

Der Kern dieses Homomorphismus ist die Untergruppe von Translationen $\{t_v = f_{I_2,v} \,|\, v \in \mathbb{R}^2\}$. Diese Untergruppe ist das Bild des injektives Homomorphismus

$$\mathbb{R}^2 \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2), \qquad v \mapsto t_v$$

Es gibt also eine kurze exakte Sequenz von Gruppen

$$0 \to \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\phi} GL_2(\mathbb{R}) \to 1$$

Außerdem, haben wir auch ein Homomorphismus $\psi\colon GL_2(\mathbb{R}^2) \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2), A \mapsto f_{A,0}$. Als Konsequenz, sehen wir dass die Gruppe $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ ein semidirektes Produkt ist:

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \rtimes GL_2(\mathbb{R})$$

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 22.10.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Affine Transformationen lassen die geometrische Eigenschaften dass wir gesehen haben unverändert:

Proposition 1.1.25. 1. *Eine affine Transformation verwandelt Geraden in Geraden: sei $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ eine affine Transformation und sei $L \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade. Dann ist $f(L)$ auch eine Gerade.*

2. *Eine affine Transformation verwandelt parallele (bzw. inzidente) Geraden in parallele (bzw. inzidente) Geraden: sei $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ eine affine Transformation und seien $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Geraden. Wenn L_1, L_2 parallel (bzw. inzident) sind, dann sind $f(L_1), f(L_2)$ auch parallel (bzw. inzident).*

Beweis. 1. Eine affine Transformation ist der Komposition einer linearen Transformation mit einer Translation. Wir wissen schon dass die Translation einer Gerade wieder eine Gerade ist, mir müssen denn die Aussage für lineare Transformationen zeigen. Seien $A \in GL_2(\mathbb{R})$ und L eine Gerade. Wir wissen dass $L = L_0 + v$ mit L_0 ein Untervektorraum mit Dimension 1 und v ein Vektor. Wir sehen dass:

$$A(L) = A(L_0 + v) = \{A(P + v) \mid P \in L_0\} = \{AP + Av \mid P \in L_0\} = A(L_0) + Av$$

und $A(L_0)$ ist wieder ein Untervektorraum mit dimension 1, da A eine invertierbare lineare Abbildung ist. Das zeigt dass $A(L)$ eine Gerade ist.

2. Wie im (1), es reicht die Aussage fur Translationen und lineare Transformationen separat zu zeigen. Seien L_1, L_2 zwei parallele Geraden: das bedeutet dass $L_1 = L_0 + v_1, L_2 = L_0 + v_2$ für eine gerade L_0 durch 0 und zwei Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Sei $A \in GL_2(\mathbb{R}^2)$: dann haben wir im Beweis vom Punkt (1) gezeigt dass $A(L_1) = A(L_0) + Av_1, A(L_2) = A(L_0) + Av_2$ und dass $A(L_0)$ eine Gerade durch 0 ist. Das zeigt dass $A(L_1), A(L_2)$ parallel sind. Sei nun $w \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor, dann $t_w(L_1) = L_1 + w = L_0 + (v_1 + w)$ und $t_w(L_2) = L_2 + w = L_0 + (v_2 + w)$. Das zeigt dass $t_w(L_1), t_w(L_2)$ parallel sind.

   Die Außage für inzidente Gerade ist einfacher und wir lassen es als Hausaufgabe.

□

Bemerkung 1.1.26. Aus dieser Proposition folgen viele andere, z.B.:

(1) Seien $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ zwei verschiedene Punkte und sei $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$. Dann $f(L(P_1, P_2)) = L(f(P_1), f(P_2))$.

Beweis. Wir wissen dass $f(L(P_1, P_2))$ eine Gerade ist, und dass diese Gerade $f(P_1), f(P_2)$ enthält. Die einzige Gerade mit dieser Eigenschaft ist $L(f(P_1), f(P_2))$. □

(2) Seien $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ Punkte und sei $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$. Die Punkte $P_i, i = 1, \ldots, n$ sind kollinear genau dann, wenn die Punkte $f(P_i), i = 1, \ldots, n$ kollinear.

Beweis. Wenn $P_1, \ldots, P_k$ kollinear sind, sei L eine Gerade durch diese Punkte. Dann ist $f(L)$ eine Gerade durch $f(P_1), \ldots, f(P_n)$. Die andere Implikation folgt aus dieser, wenn wir die affine Transformation f^{-1} betrachten. □

Bemerkung 1.1.27. Im Allgemein, jede Außage über Parallelität, Inzidenz, Kollinearität,... bleibt durch eine affine Transformation unverändert. Wenn wir dann eine solche Aussage beweisen wollen, können wir eine affine Transformation verwenden, um eine Aussage zu erhalten, die einfacher zu zeigen ist. Für diese Strategie wollen wir in der Lage sein, bestimmte affine Transformationen zu erstellen

Satz 1.1.28 (Fundamentalsatz der affinen Transformationen in der Ebene)**.** *Seien $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ nicht-kollineare Punkte und seien $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{R}$ auch nicht-kollineare Punkte. Es gibt eine einzige affine Transformation $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ so dass*

$$f(P_i) = Q_i, \qquad \textit{für } i = 1, 2, 3$$

Beweis. Wir zeigen zuerst dass so eine affine Transformation existiert. Wir betrachten die zwei Translationen t_{-P_3}, t_{-Q_3}:

$$\begin{aligned} t_{-P_3}(P_1) = P_1 - P_3, \quad t_{-P_3}(P_2) = P_2 - P_3, \quad t_{-P_3}(P_3) = 0 \\ t_{-Q_3}(Q_1) = Q_2 - Q_3, \quad t_{-Q_3}(Q_2) = Q_2 - Q_3, \quad t_{-Q_3}(Q_3) = 0 \end{aligned}$$

Da die drei Punkte $0, P_2 - P_3, P_3 - P_3$ auch nicht kollinear sind, müssen die zwei Vektoren $P_1 - P_3, P_2 - P_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ sein. Eine ähnliche Begründung zeigt dass $Q_1 - Q_3, Q_2 - Q_3$ auch eine Basis von $\mathbb{R}^2$ sind. Dann existiert eine einzige $A \in GL_2(\mathbb{R})$ so dass $A(P_1 - P_3) = Q_1 - Q_3, A(P_2 - P_3) = Q_2 - Q_3$. Sei denn $f = t_{Q_3} \circ A \circ t_{-P_3}$: sie ist eine affine Transformation weil sie eine Komposition von affine Transformationen ist. Außerdem, wenn $i = 1, 2$ dann $f(P_i) = t_{Q_3}(A(P_i - P_3)) = t_{Q_3}(Q_i - Q_3) = Q_i$, und wir sehen auch dass $f(P_3) = t_{Q_3}A(0) = t_{Q_3}(0) = Q_3$.

Sei nun $g \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ eine andere affine Transformation so dass $g(P_i) = Q_i$. Wir wollen zeigen dass $g = f$, und das ist äquivalent zu $A = t_{-Q_3} \circ g \circ t_{P_3}$. Sei $G = t_{-Q_3} \circ g \circ t_{P_3}$: diese ist eine affine Transformation weil sie die Komposition von affine Transformationen ist. Außerdem, $G(0) = t_{-Q_3}(g(P_3)) = t_{-Q_3}(Q_3) = 0$ so dass G linear ist. Endlich, wenn $i = 1, 2$, sehen wir dass $G(P_i - P_3) = t_{-Q_3}(f(P_i)) = t_{-Q_3}(Q_i) = Q_i - Q_3$, so dass $G = A$. □

Bemerkung 1.1.29. Der Beweis dieses Satzes zeigt auch wie wir die affine Transformation f finden können. Wir müssen die einzige lineare Abbildung A finden, so dass $A(P_1 - P_3) = Q_1 - Q_3, A(P_2 - P_3) = Q_2 - Q_3$, und dann $f = t_{Q_3} \circ A \circ t_{-P_3}$.

Beispiel 1.1.30. Wir betrachten die drei nicht-kollineare Punkte $P_1 = (2, 1), P_2 = (1, 2), P_3 = (1, 1)$ und die drei nicht-kollineare Punkte $Q_1 = (2, 1), Q_2 = (1, 2), Q_3 = (2, 2)$. Wir wollen die einzige affine Transformation $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ so dass $f(P_i) = Q_i$ finden. Es gibt verschiedene Strategie:

- Bemerkung 1.1.29: wir sehen dass $P_1 - P_3 = (1, 0), P_2 - P_3 = (0, 1)$ und $Q_1 - Q_3 = (0, -1), Q_2 - Q_3 = (-1, 0)$. Wir betrachten nun die Matrix

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ so dass } \quad A \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), A \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

  Dann zeigt die Bemerkung1.1.29 dass $f = t_{Q_3} \circ A \circ t_{-P_3}$. Wir können f in der üblichen Form einer Affinität schreiben:

  $$f = t_{Q_3} \circ A \circ t_{-P_3} = f_{I_2,Q_3} \circ f_{A,0} \circ f_{I_2,-P_3} = f_{I_2,Q_3} \circ f_{A,-AP_3} = f_{A,-AP_3+Q_3} = f_{A,\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)}$$

- Brute force: wir suchen eine invertierbare Matrix $A \in GL_2(\mathbb{R}^2)$ und einen Vektor v so dass $AP_i + v = Q_i$ für alle $i = 1, 2, 3$. Wir schreiben

  $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

und dann wollen wir dass

$$\begin{pmatrix} 2a+b+v_x \\ 2c+d+v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a+2b+v_x \\ c+2d+v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a+b+v_x \\ c+d+v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir können diese Gleichungen als lineares System schreiben

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und dann können wir dieses lineares System lösen. Wir sehen aber dass dieses System nicht so klein ist. Die Strategie der Bemerkung 1.1.29 ist in der Regel besser.

Als Beispiel für die Nützlichkeit von affinen Transformationen beweisen wir ein klassisches Ergebnis der ebenen Geometrie

Satz 1.1.31 (Satz von Pappos - Affine Version)**.** *Seien A, B, C drei Punkte auf einer Gerade, und P, Q, R drei Punkte auf einer anderen verschiedene Gerade. Wenn die zwei Geradepaaren $L(A, Q), L(P, B)$ und $L(B, R), L(Q, C)$ parallel sind, dann sind auch $L(A, R)$ und $L(P, C)$ parallel.*

Beweis. Da affine Transformationen parallele Geraden in parallele Geraden und kollineare Punkte in kollineare Punkte verwandeln, können wir den Satz auch nach Anwendung einer beliebigen affinen Transformation beweisen. Um eine geeignete Transformation zu finden, betrachten wir zwei Fälle: sei L die Gerade durch A, B, C und ℓ die Gerade durch P, Q, R

- $L \cap \ell \neq \emptyset$: sei $S \in L \cap \ell$. Die drei Punkte S, A, R sind nicht kollinear, da $L \neq \ell$. Dann durch eine affine Transformation können wir annehmen dass $S = (0, 0), A = (1, 0), R = (0, 1)$. Dann $B = (b, 0), C = (c, 0)$ und $P = (0, p), Q = (0, q)$ für manche $b, c, p, q \in \mathbb{R}$. Die Geraden $L(A, Q), L(P, B)$ sind parallel, genau dann, wenn $A - Q = (1, -q)$ und $P - B = (-b, p)$ linear abhängig sind. Das bedeutet

  $$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & -b \\ -q & p \end{pmatrix} = p - bq$$

  Eine ähnliche Begründung mit den Geraden $L(B, R), L(Q, C)$ zeigt dass

  $$0 = \det \begin{pmatrix} b & -c \\ -1 & q \end{pmatrix} = bq - c$$

  Dann $P = (0, bq), C = (bq, 0)$ so dass $L(A, R) = \{x + y = 1\}, L(P, Q) = \{x + y = bq\}$ parallel sind.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 24.10.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

- $L \cap \ell = \emptyset$: dann sind L, ℓ parallel. Die drei Punkte A, B, R sind nicht kollinear (sonst $R \in L$ und das ist unmöglich) und durch eine affine Transformation können wir annehmen dass $A = (0,0), B = (1,0), R = (0,1)$. Dann $C = (c,0), P = (p,1), Q = (q,1)$ für $c, p, q \in \mathbb{R}$. Da die Gerade $L(A,Q), L(P,B)$ parallel sind, müssen die zwei Vektoren $Q - A = (q,1)$ und $P - B = (p-1,1)$ linear abhängig sein. Das bedeutet

  $$0 = \det \begin{pmatrix} q & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = q - p + 1$$

  Eine ähnliche Begründung mit den Geraden $L(B,R), L(Q,C)$ zeigt dass

  $$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & q-c \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + q - c$$

  Dann $P = (p,1), C = (p,0)$ so dass $L(A,R) = \{x = 0\}$ und $L(P,C) = \{x = p\}$ parallel sind.

$\square$

1.1.2 Die affine Ebene über anderen Körpern

Jetzt machen wir eine wichtige Beobachtung: In unserer gesamten bisherigen Diskussion haben wir nie irgendwelche besonderen Eigenschaften der reellen Zahlen verwendet, außer der Tatsache, dass $\mathbb{R}^2$ ein Körper ist. Das bedeutet, dass alles für ein beliebiges Feld $\mathbb{K}$ durchgeht, und wir können auf dieselbe Weise die affine Ebene $\mathbb{K}^2$ und Punkte und Linien auf ihr definieren. Alles, was wir für die reelle affine Ebene bewiesen haben, gilt auch für $\mathbb{K}^2$, gehen Sie unsere Beweise durch, wenn Sie nicht überzeugt sind.

Beispiel 1.1.32. Die affine Ebene $\mathbb{Q}^2$ ist ist die Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, in der alle Punkte rationale Koordinaten haben.

Beispiel 1.1.33. Der affine Raum $\mathbb{C}^2$ ist schwer zu veranschaulichen, da er "4 reelle Dimensionen" hat, aber wir haben schon gesagt, dass er sich wie der Raum $\mathbb{R}^2$ verhält, so dass man auch in diesem Fall sehr oft die gleichen zweidimensionalen Bilder zeichnet

Beispiel 1.1.34. Der affine Raum $\mathbb{F}_2^2$ ist eine Menge mit vier Elementen:

$$\mathbb{F}_2^2 = \{([0],[0]),([0],[1]),([1],[0]),([1],[1])\}$$

Eine Gerade $L \subseteq \mathbb{F}^2$ ist eine Translation einer Untervektorraum mit Dimension 1, und jeder Untervektorraum mit Dimension 1 ist isomorph zu $\mathbb{F}_2$. Insbesondere enthält jede Gerade genau 2 Punkte. Andererseits, durch jede zwei Punkte geht eine Gerade. Das zeigt dass die Geraden in $\mathbb{F}_2$ genau die Teilmengen mit 2 Elementen sind. Insbesondere haben wir 6 Geraden.

Man kann zeigen, dass, wenn $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen ist, es genau $q(q+1)$ Geraden in $\mathbb{F}_q^2$ gibt

Natürlich gibt es auch Aussagen, die vom jeweiligen Körper abhängen. Zum Beispiel sind die einzigen Körper , für die es sinnvoll ist, die Anzahl der Zeilen zu zählen, endliche Körper.

Eine subtilere Aussage, die für die reellen Zahlen gilt, aber nicht allgemein, ist die folgende:

Satz 1.1.35 (Sylvester-Gallai, 1933 vermutet und 1944 bewiesen)**.** *Seien $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$ nicht kollineare Punkte. Dann existiert eine Gerade L die genau zwei dieser Punkte enthält.*

Beispiel 1.1.36. Sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ so dass $\zeta^3 = 1$. Wir betrachten die folgende Punkte in $\mathbb{C}^2$

$$\begin{array}{ccc} \left(0, \frac{1}{3}\right) & \left(\frac{1}{2}, 0\right) & (-1, 1) \\ \left(0, \frac{\zeta}{1+\zeta}\right) & \left(\frac{\zeta}{\zeta+1}, 0\right) & \left(\frac{\zeta}{\zeta-2}, -\frac{1}{\zeta-2}\right) \\ \left(0, \frac{\zeta^2}{1+2\zeta^2}\right) & \left(\frac{\zeta^2}{\zeta^2+1}, 0\right) & \left(\frac{\zeta^2}{\zeta^2-2}, -\frac{1}{\zeta^2-2}\right) \end{array}$$

Das Sylvester-Gallai-Theorem versagt für diese Punkte: jede Linie in $\mathbb{C}^2$, die zwei dieser Punkte enthält, muss einen dritten enthalten. Dies ist ein Beispiel für eine Hesse-Konfiguration.

Wir werden nun affine Räume in beliebiger Dimension und über beliebigen Körpern betrachten.

1.2 Affine Räume

Definition 1.2.1 (Affiner Raum)**.** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Der standard n-dimensionale affine Raum über $\mathbb{K}$ ist die Menge $\mathbb{K}^n$.

Beispiel 1.2.2. Die Menge $\mathbb{K}$ ist die affine Gerade und $\mathbb{K}^2$ ist die affine Ebene.

Definition 1.2.3 (Affiner Unterraum)**.** Einer affine Unterraum von $\mathbb{K}^n$ ist eine Teilmenge $L \subseteq \mathbb{K}^n$ mit der Form

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \begin{array}{cl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 & = 0 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + b_m & = 0 \end{array} \right\}$$

für $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$. Anders gesagt, einer affine Unterraum ist die Lösungsmenge eines lineares Gleichungssystems.

Bemerkung 1.2.4. Seien $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}, b = (b_i) \in \mathbb{K}^m$. Wir können den affine Unterraum L in einer kompakter Form schreiben:

$$L = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax + b = 0\} = \{Ax + b = 0\}$$

Beispiel 1.2.5. Man sollte die affine Unterräume

$$L_1 = \{x = y - z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3, \qquad L_2 = \{x + y + z = 0\}$$

von $\mathbb{R}^3$ skizzieren.

Beispiel 1.2.6. Der ganze Raum $\mathbb{K}^n$ und die leere Menge $\emptyset$ sind affine Unterräume: $\mathbb{K}^n = \{0 \cdot x = 0\}$ und $\emptyset = \{0 \cdot x = 1\}$, wobei $0 \cdot x$ die Multiplikation mit einer $1 \times n$ Null-Matrix ist.

Punkte $P = (x_{P1}, \dots, x_{Pn})$ sind auch affine Unterräume: $P = \{x_1 - x_{P1} = \cdots = x_n - x_{Pn} = 0\}$.

Lemma 1.2.7. *Die folgende sind äquivalent:*

1. *Affine Unterräume* $L \subseteq \mathbb{K}^n$ *die durch* 0 *gehen.*

2. *Affine Unterräume* $L \subseteq \mathbb{K}^n$ *mit Gleichung* $L = \{Ax + b = 0\}$.

3. *Untervektorräume* $L \subseteq \mathbb{K}^n$.

Beweis. (1) $\implies$ (2): Sei $L = \{Ax + b = 0\}$ ein affiner Unterraum, der durch 0 geht. Dann $0 = A \cdot 0 + b = b$. Das bedeutet dass $L = \{Ax = 0\}$.

(2) $\implies$ (3): Sei $L = \{Ax = 0\}$. Dann ist $L = \operatorname{Ker} A$ ein Untervektorraum.

(3) $\implies$ (1): Sei $U \subseteq \mathbb{K}^n$ ein Untervektorraum, dann wissen wir aus der lineare Algebra dass $U = \{Ax = 0\}$ für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. $\square$

Wie in der affinen Ebene, haben wir Translationen in den affinen Raum:

Definition 1.2.8 (Translation)**.** Sei $v \in \mathbb{K}^n$ ein Vektor. Die Translation durch v ist die Abbildung

$$t_v \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, P \mapsto x + v$$

Wenn $X \subseteq \mathbb{K}^2$ eine Teilmenge ist, schreiben wir

$$X + v = t_v(X) = \{x + v \mid x \in X\}$$

Bemerkung 1.2.9. Wie für Translationen in der Ebene, sieht man dass

1. $t_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$

2. $t_v \circ t_u = t_{v+u}$ für alle $u, v \in \mathbb{K}^n$.

Insbesondere sind alle Translationen invertierbar und

$$t_v^{-1} = t_{-v} \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{K}^n$$

Die Translationen abbilden eine freie und transitive Gruppenoperation der additive Gruppe $(\mathbb{K}^n, +)$ auf $\mathbb{K}^n$.

Lemma 1.2.10. *Sei* $L = \{Ax + b = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n$ *ein affiner Unterraum.*

1. *Eine Translation von* L *ist ein affiner Unterraum: sei* $v \in \mathbb{K}^n$ *ein Vektor, dann*

$$L + v = \{A(x - v) + b = 0\} = \{Ax + (b - Av) = 0\}$$

2. *Wenn* $L \neq \emptyset$, *gibt es einen einzigen Untervektorraum* $L_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ *so dass* L *eine Translation von* L_0 *ist:* $L = L_0 + v$ *für ein* $v \in \mathbb{K}^n$. *Dieser Untervektorraum ist*

$$L_0 = \{Ax = 0\}$$

3. *Wenn* $L \neq \emptyset$, *gilt dass* $L = L_0 + v$ *genau dann, wenn* $v \in L$.

Beweis. 1. Wir sehen dass

$$x \in L + v \iff x - v \in L \iff A(x - v) + b = 0$$

und das ist genau was wir zeigen wollten.

2. Seien $v \in L$ und $L_0 = \{Ax = 0\}$. Wir zeigen dass $L = L_0 + v$, mit Punkt (1):

$$L_0 + v = \{A(x - v) = 0\} = \{Ax - Av) = 0\} = \{Ax + b = 0\} = L$$

   Sei nun $L'_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ ein anderer Untervektorraum so dass $L = L'_0 + v'$ für ein $v' \in \mathbb{R}^2$. Da L'_0 eine Translation von L ist, sehen wir dass $L'_0 = \{Ax + b' = 0\}$ (die Matrix A ist die selbe von L), und da L'_0 durch 0 geht, sehen wir dass $b' = 0$. Dann $L_0 = L'_0$.

3. Wenn $v \in L$, haben wir schon gezeigt dass $L = L_0 + v$. Andererseits, wenn $L = L_0 + v$, dann $v = 0 + v \in L$, da $0 \in L_0$.

□

Definition 1.2.11 (Untervektorraum eines affinen Unterraum)**.** Sei $L \subseteq \mathbb{K}^n, L \neq \emptyset$ ein affiner Unterraum. Der einzige Untervektorraum $L_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ so dass L eine Translation von L_0 ist, ist der zu L assoziierter Untervektorraum.

Definition 1.2.12 (Dimension eines affinen Unterraum)**.** Sei $L \subseteq \mathbb{K}^n$ ein affiner Unterraum. Wenn $L \neq \emptyset$, sei $L_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ der assoziierte Untervektorraum, die Dimension von L ist

$$\dim L := \dim L_0$$

Wir setzen auch $\dim \emptyset = -1$.

Beispiel 1.2.13. Eine Gerade ist ein affiner Unterraum $L \subseteq \mathbb{K}^n$ mit Dimension $\dim L = 1$. Eine Ebene ist ein affiner Unterraum $L \subseteq \mathbb{K}^n$ mit Dimension $\dim L = 2$. Eine Hyperebene ist ein affiner Unterraum $L \subseteq \mathbb{K}^n$ mit $\dim L = n - 1$.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 29.10.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

1.2.1 Beschreibungen eines affinen Unterraums

(Dieser Abschnitt wird im Präsenzblatt der Übungseinheiten besprochen.) Ein affiner Unterraum $L \subseteq \mathbb{K}^n$ ist durch Gleichungen definiert,und, wenn er nicht leer ist, dann ist er auch eine Translation eines Untervektorraums. Das bedeutet dass ein affiner Unterraum zwei mögliche Beschreibungen hat:

- **Durch lineare Gleichungen**:

$$L = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax + b = 0\} \qquad \text{mit } A \in \mathbb{K}^{m \times n}, b \in \mathbb{K}^m$$

  Der assoziierte Untervektorraum zu L ist denn

$$L_0 = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} = \operatorname{Ker} A$$

  Normalerweise wollen wir eine **minimale Menge von Gleichungen**, also $n - k$ Gleichungen, wobei $k = \dim L$. Das bedeutet dass A eine $(n - k) \times n$ Matrix mit Rang $n - k$ ist.

- **Durch eine Parametrisierung**:

  $$L = \{t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k + P \,|\, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{K}\}, \qquad \text{mit } v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{K}^n \text{ und } P \in L$$

  Der assoziierte Untervektorraum zu L ist denn

  $$L_0 = \{t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k + P \,|\, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{K}\}$$

  Normalerweise wollen wir eine **minimale Parametrisierung**, was bedeutet, dass die $u_1, \ldots, u_k$ eine Basis von L_0 sind, so dass $k = \dim L_0 = \dim L$.

Wenn wir eine Darstellung durch Gleichungen haben, ist es einfach, eine minimale Menge von Gleichungen durch das Gauß-Algorithmus zu erhalten

Algorithmus 1.2.14. (**Von Gleichungen zu minimale Gleichungen**): Sei $L = \{Ax + b\} = \{Ax = -b\}$. Wir können eine minimale Menge von Gleichungen für L wie folgt finden:

1) Wir bringen die erweiterte Matrix $(A| - b)$ mit elementaren Zeilenumformungen in einer Matrix $(A'| - b')$ in (reduzierte) Zeilenstufenform.

2) Wir können $\mathrm{Rang}(A')$ und $\mathrm{Rang}(A'| - b')$ berechnen. Wenn $\mathrm{Rang}(A') \neq \mathrm{Rang}(A'| - b')$, dann $L = \emptyset$ und wir sind fertig.

3) Wenn $\mathrm{Rang}(A') = \mathrm{Rang}(A'| - b')$. Dann $\dim L = n - \mathrm{Rang}\, A$, und $L = \{A'x + b' = 0\}$ ist eine Beschreibung von L durch eine minimale Menge von $n - \dim L$ Gleichungen.

Beispiel 1.2.15. Wir finden eine minimale Menge von Gleichungen für den affinen Unterraum

$$L = \left\{ \begin{matrix} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 1 & = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 1 & = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2 & = 0 \end{matrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Wir bringen die erweiterte Matrix in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & | & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z1 \leftrightarrows Z2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z3 \to Z3 - 3Z1]{Z2 \to Z2 - 2Z1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & | & -1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z3 \to Z3 - Z2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Wir sehen dass der Rang mit oder ohne der letzten Spalte immer 2 ist. Das bedeutet dass $\dim L = 4 - 2 = 2$ und dass

$$L = \left\{ \begin{matrix} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 1 & = 0 \\ -5x_2 - x_3 - 3x_4 + 1 & = 0 \end{matrix} \right\}$$

eine minimale Beschreibung von L durch Gleichungen ist.

Algorithmus 1.2.16. (**Von einer Parametrisierung zu einer minimale Parametrisierung**): Sei $L = \{t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k + P \,|\, t_i \in \mathbb{K}\}$. Wir finden eine minimale Parametrisierung wie folgt:

1) Wir betrachten die Matrix $C = (v_1|\dots|v_k) \in \mathbb{K}^{n\times k}$, die die v_i als Spaltenvektoren hat.

2) Wir bringen die Matrix C mit elementare Zeilenumformungen in einer Matrix C' in Zeilenstufenform. Insbesondere $r = \operatorname{Rang}(C') = \dim L$.

3) Wenn C' pivots in den Spalten $j_1, \dots, j_r$ hat, dann sind $v_{j_1}, \dots, v_{j_r}$ eine Basis von L_0, so dass
$$L = \{t_{j_1}v_{j_1} + \dots + t_{j_r}t_{j_r} + P \,|\, t_{j_1}, \dots, t_{j_r} \in \mathbb{K}\}$$
eine minimale Parametrisierung von L ist.

Beispiel 1.2.17. Sei
$$L = \left\{ t_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^3$$
wir finden eine minimale Parametrisierung von L durch das Algorithmus:
$$\begin{pmatrix}1&4&3\\2&5&3\\3&6&3\end{pmatrix} \xrightarrow[Z3\to Z3-3Z1]{Z2\to Z2-2Z1} \begin{pmatrix}1&4&3\\0&-3&-3\\0&-6&-6\end{pmatrix} \xrightarrow{Z3\to Z3-2Z2} \begin{pmatrix}1&4&3\\0&-3&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$
Diese Matrix ist in Zeilenstufenform und hat Pivots in der Spalten 1 und 2. Das zeigt dass $\dim L = 2$ und dass
$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \right)$$
eine Basis von L_0 ist. Insbesondere bekommen wir eine minimale Parametrisierung von L als
$$L = \left\{ t_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^3$$

Wir werden nun zwei Methoden vorstellen, um mit Hilfe des Gauß-Algorithmus von einer Darstellung zur anderen zu wechseln. Es ist wichtig zu beachten, dass die von uns vorgestellten Methoden nur zwei der möglichen Methoden sind. Insbesondere im Fall von Geraden in $\mathbb{K}^2$ war die "Brute Force" eine Methode, die funktionierte. Diese "Brute Force" Methode ist in anderen Fällen oft zu kompliziert, so dass von ihrer Anwendung abgeraten wird.

Algorithmus 1.2.18. (**Von Gleichungen zu einer Parametrisierung**): Sei $L = \{Ax + b = 0\} = \{Ax = -b\}$. Wir können eine minimale Parametrisierung von L wie folgt finden:

1) Wir bringen die Matrix $(A| - b)$ mit elementaren Zeilenumformungen in einer Matrix $(A'| - b')$ in reduzierte Zeilenstufenform.

2) Wir können $\operatorname{Rang}(A')$ und $\operatorname{Rang}(A'| - b')$ berechnen. Wenn $\operatorname{Rang}(A') \neq \operatorname{Rang}(A'| - b')$, dann $L = \emptyset$ und wir sind fertig.

3) Wenn $\operatorname{Rang}(A') = \operatorname{Rang}(A'| - b')$, dann $P = -b'$ ist ein Punkt in L und L selbst hat Dimension $k = n - \operatorname{Rang}(A')$.

4) Wir verwenden die Gleichungen $A'x = 0$, um die Variablen x_i, die den Pivots von A' entsprechen, in Form der anderen Variablen zu schreiben.

5) Dies ergibt eine Basis $v_1, \dots, v_k$ von $L_0 = \{Ax = 0\}$.

6) Wir haben eine minimale Parametrisierung $L = \{t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k + P \mid t_i \in \mathbb{K}\}$

Beispiel 1.2.19. Wir finden eine minimale Parametrisierung für den affinen Unterraum

$$L = \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 1 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 1 & = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - 3 & = 0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^4$$

Wir anwenden das Algorithmus

$$(A| - b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z3 \to Z3 - 3Z1]{Z2 \to Z2 - Z1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z3 \to Z3 - Z2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z2 \to -\frac{1}{2} Z2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z1 \to Z1 - Z2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist in reduzierter Zeilenstufenform mit Pivots in den Spalten 1 und 2. Wir schreiben das lineare System, das dieser Matrix entspricht, und wir schreiben die Variablen x_1, x_2 durch die anderen

$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = 1 \\ x_2 - x_4 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & = -x_3 + 1 \\ x_2 & = x_4 \end{cases}$$

So dass $x \in L$ genau dann, wenn

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 + 1 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis vom assoziierten Untervektorraum L_0.

Algorithmus 1.2.20. (Von einer Parametrisierung zu Gleichungen:) Sei $L = \{t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k + P \mid t_i \in \mathbb{K}\}$. Wir finden eine minimale Beschreibung von U durch Gleichungen wie folgt:

1) Wir betrachten die Matrix $C = (v_1|\dots|v_k) \in \mathbb{K}^{n\times k}$, die die v_i als Spaltenvektoren hat. Wir betrachten $t = (t_1, \dots, t_k)^T \in \mathbb{K}^{k\times 1}$ als ein Spaltenvektor von Variabeln. Dann

$$L = \{x \,|\, Ct + P = x \text{ für ein } t \in \mathbb{K}^k\} = \{x \,|\, Ct = x - P \text{ hat eine Lösung } t \in \mathbb{K}^k\}$$

2) Wir betrachten die erweiterte Matrix $(C|x-P)$ und wir bringen sie mit elementare Zeilenumformungen in einer Matrix $(C'|x')$ womit C' Zeilenstufenform hat. Die Matrix C' hat $\operatorname{Rang}(C') = \dim L$ und die erste $\operatorname{Rang}(C')$ Zeilen von C' sind nicht null, alle andere sind null.

3) Eine minimale Menge von Gleichungen für L erhält man, indem man die letzten $(n-\operatorname{rk}(C'))$-Einträge von x' auf Null setzt. Dies sind die Einträge, die den Nullzeilen von C' entsprechen.

4) Als Nebenprodukt können wir auch eine Basis von L_0 finden: wenn C' Pivots in den Spalten $j_1, \dots, j_r$ hat, dann sind die ursprünglichen Vektoren $v_{j_1}, \dots, v_{j_r}$ eine Basis von L_0.

Beispiel 1.2.21. Wir finden eine minimale Beschreibung durch Gleichungen für den affine Unterraum

$$L = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 2i \\ i \\ 0 \\ 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \,|\, t_i \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{C}^4$$

Wir wenden die elementare Zeilenumformungen auf die erweiterte Matrix an

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2i & | & x_1 \\ 0 & 1 & i & | & x_2 - i \\ -1 & 1 & 0 & | & x_3 + i \\ 2 & 1 & 3i & | & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z4\to Z4-2Z1]{Z3\to Z3+Z1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2i & | & x_1 \\ 0 & 1 & i & | & x_2 - i \\ 0 & 2 & 2i & | & x_1 + x_3 + i \\ 0 & -1 & -i & | & -2x_1 + x_4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z4\to Z4+Z2]{Z3\to Z3-2Z2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2i & | & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & | & x_2 - i \\ 0 & 0 & 0 & | & x_1 - 2x_2 + x_3 + 3i \\ 0 & 0 & 0 & | & -2x_1 + x_2 + x_4 - i \end{pmatrix}$$

Sei C' diese Matrix ohne die letzte Spalte. Die Matrix C' ist in Zeilenstufenform, $\operatorname{Rang}(C') = 2$, und die letzte 2 Zeilen von C' sind null. Das bedeutet dass eine minimale Menge von Gleichungen für L ist

$$L = \begin{Bmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3i & = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 - i & = 0 \end{Bmatrix}$$

1.2.2 Schnittmenge und affine Hülle

Lemma 1.2.22. *Seien $L_i \subseteq \mathbb{K}^n, i \in I$ affine Unterräume. Die Schnittmenge $\cap_{i\in I} L_i$ ist ein affiner Unterraum und*

$$\bigcap_{i\in I} L_i = \left(\bigcap_{i\in I} L_{i,0}\right) + v$$

wobei $v \in \cap_{i\in I} L_i$ und $L_{i,0}$ der assoziierte Untervektorraum zu L_i ist.

Beweis. Wenn $\cap_{i\in L} L_i = \emptyset$ dann sind wir fertig, da die leere Menge affin ist. Wenn nicht, sei $v \in \cap_{i\in I}$: wir wissen dass $L_i = L_{i,0} + v$ wobei $L_{0,i}$ der assoziierte Untervektorraum zu L_i ist. Dann

$$\bigcap_{i\in I} L_i = \bigcap_{i\in I}(L_{i,0} + v) = \left(\bigcap_{i\in I} L_{i,0}\right) + v$$

und $\bigcap_{i\in I} L_{i,0}$ ist ein Untervektorraum, weil die Schnittmenge von Untervektorräumen ein Untervektorraum ist. Das zeigt dass $\bigcap_{i\in I} L_i$ einer Translation eines Untervektorraums ist, was bedeutet dass es ein affiner Unterraum ist. □

Beispiel 1.2.23. Wir betrachten die zwei affinen Unterräume von $\mathbb{Q}^3$:

$$L_1 = \{x + y + z = 2\}\,, \qquad L_2 = \{x = 0, y - z = 0\}$$

Dann

$$L_1 \cap L_2 = \left\{\begin{matrix} x+y+z & = 2 \\ x & = 0 \\ y - z & = 0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 2z & = 2 \\ x & = 0 \\ y & = z \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Beispiel 1.2.24. Wir betrachten die zwei affinen Unterräume von $\mathbb{C}^4$:

$$L_1 = \left\{\begin{pmatrix} s+t-2i \\ 0 \\ s \\ t+2 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{C}\right\}, \quad L_2 = \{x + i \cdot y + z + w = 4\}$$

Dann ist $L_1 \cap L_2$ die Menge von Punkten $(s + t - i, 0, s, t + 2), s, t \in \mathbb{C}$ so dass

$$(s + t - 2i) + i \cdot 0 + s + (t + 2) = 4$$

Das ist äquivalent zu $2s + 2t = 2 + 2i$, was bedeutet $s = -t + 1 + i$. Das zeigt dass

$$L_1 \cap L_2 = \left\{\begin{pmatrix} -t+1+i+t-2i \\ 0 \\ -t+1+i \\ t+2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1-i \\ 0 \\ -t+1+i \\ t+2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C}\right\}$$

Beispiel 1.2.25. Wenn zwei affine Unterräume $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{K}^n$ beide durch eine Parametrisierung gegeben sind, dann ist es normalerweise besser eine oder beide durch Gleichungen zu beschreiben, um die Schnittmenge $L_1 \cap L_2$ zu berechnen.

Definition 1.2.26 (Affine hülle)**.** Sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Teilmenge. Die affine Hülle $L(S)$ von S, oder der von S erzeugter Unterraum ist die Schnittmenge aller affine Unterräume die S enthälten:

$$L(S) = \bigcap_{\substack{L \subseteq \mathbb{K}^n \text{ affin}, \\ L \supseteq S}} L$$

Bemerkung 1.2.27. Die affine Hülle $L(S)$ ist der kleinste affine Unterraum der S enthält. Insbesondere $L(S) = S$ genau dann, wenn S ein affiner Unterraum ist.

Bemerkung 1.2.28. In der lineare Algebra, die lineare Hülle einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{K}^n$ oder der von T erzeugter Untervektorraum ist

$$\langle T \rangle = \bigcap_{\substack{L_0 \subseteq \mathbb{K}^n,\ \text{U.Vr.} \\ L_0 \supseteq T}} L_0$$

Es gibt eine Interpretation der affine Hülle durch die lineare Hülle: sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$ nicht leer und sei $P_0 \in S$ ein Punkt. Wir betrachten die Translation $S - P_0$. Wir wollen nun zeigen dass

$$L(S) = \langle S - P_0 \rangle + P_0$$

Insbesondere ist $\langle S - P_0 \rangle$ der assoziierte Untervektorraum von $L(S)$

Beweis. Sei $L \subseteq \mathbb{K}^n$ ein affiner Unterraum. Wenn $L \supseteq S$, dann $P_0 \in L$, so dass $L_0 = L - P_0$ ein Untervektorraum der $S - P_0$ enthält ist. Andererseits, wenn $L_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ ein Untervektorraum so dass $L_0 \supseteq S - P_0$ ist, dann ist $L = L_0 + P_0$ ein affiner Unterraum, der S enthält. Das zeigt dass

$$L(S) = \bigcap_{\substack{L \subseteq \mathbb{K}^n \text{ affin}, \\ L \supseteq S}} L = \bigcap_{\substack{L \subseteq \mathbb{K}^n \text{ affin}, \\ L \supseteq S}} (L - P_0) + P_0 = \bigcap_{\substack{L_0 \subseteq \mathbb{K}^n,\ \text{U.Vr.} \\ L_0 \supseteq S - P_0}} L_0 + P_0 = \langle S - P_0 \rangle + P_0$$

□

Beispiel 1.2.29. Sei $S = \{P, Q\} \subseteq \mathbb{K}^n$ wobei P, Q zwei verschiedene Punkte sind. Wir sehen dass $S - Q = \{P - Q, 0\}$ und der Untervektorraum erzeugt von dieser Menge ist $\langle P - Q \rangle = \{t(P - Q) \mid t \in \mathbb{K}\}$. Dann

$$L(P, Q) = \langle P - Q \rangle + Q = \{t \cdot (P - Q) + Q \mid P, Q \in \mathbb{K}\} = \{t \cdot P + (1 - t) \cdot Q \mid t \in \mathbb{K}\}$$

Wir sehen dass $L(P, Q)$ eine Gerade ist, und, wenn $\mathbb{K}^n = \mathbb{K}^2$ dann ist sie genau die einzige Gerade die durch P, Q geht.

Dieses Beispiel kann generalisiert werden

Definition 1.2.30 (Affine Kombination)**.** Seien $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{K}^n$ Punkte. Eine affine Kombination dieser Punkte ist ein Punkt mit der Form

$$\sum_{i=1}^{r} t_i P_i, \qquad t_i \in \mathbb{K}, \ \sum_{i=1}^{r} t_i = 1$$

Proposition 1.2.31. *Sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Teilmenge. Die affine Hülle $L(S)$ ist die Menge von aller mögliche affine Kombinationen von Punkten in S:*

$$L(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} t_i P_i \mid P_i \in S,\ t_i \in \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^{r} t_i = 1 \right\}$$

Beweis. Wenn $S = \emptyset$, dann sind beide Seite gleich $\emptyset$. Wenn $S \neq \emptyset$, sei $P_0 \in S$. Der Untervektorraum $\langle S - P_0 \rangle$ ist die Menge von alle mögliche lineare Kombinationen von Vektoren in $S - P_0$:

$$\langle S - P_0 \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{r} t_i (P_i - P_0) \mid P_i \in S, t_i \in \mathbb{K} \right\}$$

und dann

$$L(S) = \langle S - P_0 \rangle + P_0 = \left\{ \sum_{i=1}^r t_i P_i + (1 - \sum_{i=1}^r t_i) P_0 \,|\, t_i \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ \sum_{i=0}^r t_i P_i \,|\, P_i \in S, t_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^r t_i = 1 \right\}$$

Das ist was wir zeigen wollten. □

Beispiel 1.2.32. Die affine Hülle von der Punkten $P_1 = (2,0,0), P_2 = (0,3,0), P_3 = (0,0,4)$ in $\mathbb{R}^3$ ist

$$L(P_1, P_2, P_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 2t_1 \\ 3t_2 \\ 4t_3 \end{pmatrix} \,|\, t_1 + t_2 + t_3 = 1 \right\}$$

und man kann auch leicht eine Beschreibung durch eine Gleichung finden:

$$L(P_1, P_2, P_3) = \left\{ \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \frac{1}{4} x_3 = 1 \right\}$$

Wir können die affine Hülle zweier affine Unterräume durch die Summe von Untervektorräume bestimmen:

Proposition 1.2.33. *Seien $M, N \subseteq \mathbb{K}^n$ zwei nicht leere affine Unterräume, seien M_0, N_0 die assoziierten Untervektorräume und seien $P_0 \in M_0, Q_0 \in N_0$. Dann*

$$L(M, N) = \langle M_0 + N_0, Q_0 - P_0 \rangle + P_0$$

und $P_0 - Q_0 \in M_0 + N_0$ genau dann, wenn $M \cap N \neq \emptyset$. Insbesondere

$$\dim L(M, N) = \begin{cases} \dim(M_0 + N_0), & \textit{falls } M \cap N \neq \emptyset \\ \dim(M_0 + N_0) + 1, & \textit{falls } M \cap N = \emptyset \end{cases}$$

Beweis. Wir haben $M = M_0 + P_0$ und $N = N_0 + Q_0$ so dass

$$L(M, N) = \langle M - P_0, N - P_0 \rangle + P_0 = \langle M_0, N_0 + (Q_0 - P_0) \rangle + P_0$$

Nun sehen wir dass $\langle N_0 + (Q_0 - P_0) \rangle = \langle N_0, Q_0 - P_0 \rangle$, weil $0 \in N_0$. Dann $\langle M_0, N_0 + (Q_0 - P_0) \rangle = \langle M_0, N_0, Q_0 - P_0 \rangle = \langle M_0 + N_0, Q_0 - P_0 \rangle$. Wir müssen nun zeigen dass $Q_0 - P_0 \in M_0 + N_0$ genau dann, wenn $M \cap N \neq \emptyset$. Nehmen wir an dass $Q_0 - P_0 = v + w$ für $v \in M_0, w \in N_0$. Dann $v + P_0 = -w + Q_0$ und die linke Seite ist ein Punkt in M wahrend die rechte Seite ein Punkt in N ist, so dass wir einen Punkt in $M \cap N$ gefunden haben. Andererseits, wenn $M \cap N \neq \emptyset$, sei $R_0 \in M \cap N$: dann $P_0 = v + R_0, Q_0 = w + R_0$ für $v \in M_0, w \in N_0$, so dass $Q_0 - P_0 = w - v \in M_0 + N_0$. □

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 31.10.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Beispiel 1.2.34. Wir betrachten die zwei affinen Unterräume von $\mathbb{Q}^3$.

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} s - 1 \\ -s + 1 \\ s \end{pmatrix} \,|\, s \in \mathbb{Q} \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ t + 1 \\ t \end{pmatrix} \,|\, t \in \mathbb{Q} \right\}$$

Die assoziierten Untervektorräume sind $M_0 = \{(s,-s,s) \mid s \in \mathbb{Q}\} = \langle(1,-1,1)\rangle$ und $N_0 = \{(2t,t,t) \mid t \in \mathbb{Q}\} = \langle(2,1,1)\rangle$ und $P_0 = (-1,1,0) \in M$ und $Q_0 = (0,1,0) \in N$. Wir berechnen

$$\langle M_0 + N_0, Q_0 - P_0\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{Q}^3$$

weil diese drei Vektoren linear unabhängig sind. Dann $L(M,N) = \mathbb{Q}^3 + P_0 = \mathbb{Q}^3$.

Beispiel 1.2.35. Wenn zwei affine Unterräume durch eine Parametrisierung gegeben sind, ist es einfach, die affine Hülle über Proposition zu berechnen. Wenn stattdessen einer oder beide durch Gleichungen gegeben sind, dann ist es besser, sie zunächst durch eine Parametrisierung zu beschreiben und dann die affine Hülle zu berechnen.

Korollar 1.2.36. *Seien $M, N \subseteq \mathbb{K}^n$ zwei affine Unterräume, dann*

$$\dim L(M,N) \leq \dim M + \dim N + 1$$

Außerdem, wenn $M \cap N \neq \emptyset$ gilt dass

$$\dim L(M,N) = \dim M + \dim N - \dim M \cap N$$

Beweis. Wenn M oder N leer ist, ist die Formel leicht zu zeigen. Wenn beide M, N nicht leer sind, seien M_0, N_0 die assoziierten Untervektorräume. Nehmen wir zuerst an, dass $M \cap N \neq \emptyset$: dann zeigt Lemma 1.2.22 dass $\dim M \cap N = \dim M_0 \cap N_0$ und Proposition 1.2.33, dass $\dim L(M,N) = \dim(M_0 + N_0)$. Dann die übliche Formel für Untervektorräume ergibt

$$\dim L(M,N) + \dim M \cap N = \dim(M_0 + N_0) + \dim(M_0 \cap N_0) = \dim M_0 + \dim N_0 = \dim M + \dim N$$

Wenn $M \cap N = \emptyset$, dann $\dim(M \cap N) = -1$. Außerdem zeigt Proposition 1.2.33 dass

$$\dim L(M,N) = \dim(M_0 + N_0) + 1 = \dim(M_0) + \dim(N_0) - \dim(M_0 \cap N_0) + 1 \leq \dim M + \dim N + 1$$

□

Definition 1.2.37 (Parallele affine Unterräume)**.** Seien $L, M \subseteq \mathbb{K}^n$ zwei affine Unterräume und seien L_0, M_0 die assoziierte Untervektorräume. Die affine Unterräume L, M sind parallel, wenn $L_0 \subseteq M_0$ oder $M_0 \subseteq L_0$.

Bemerkung 1.2.38. Seien $L, M \subseteq \mathbb{K}^n$ zwei affine Unterräume mit $\dim L = \dim M$. Dann sind L, M parallel, genau dann, wenn $L_0 = M_0$.

Bemerkung 1.2.39. Seien $L, M \subseteq \mathbb{K}^n$ zwei parallele affine Unterräume, wenn $L \cap M \neq \emptyset$, dann $L \subseteq M$ oder $M \subseteq L$. Insbesondere sind zwei parallele Untervektorräume mit der gleiche Dimension entweder gleich oder disjunkt.

Beweis. Seien L_0, M_0 die assoziierte Untervektorräume und nehmen wir an, dass $L_0 \subseteq M_0$. Sei auch $v \in L \cap M$. Dann $L = L_0 + v$ und $M = M_0 + v$, so dass $L \subseteq M$. □

Bemerkung 1.2.40. Sei $L \subseteq \mathbb{K}^n$ ein affiner Unterraum mit assoziierter Untervektorraum L_0 und sei $P \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $L_0 + P$ der einziger affiner Unterraum mit der gleiche Dimension von L, der parallel zu L ist und durch P geht.

Beweis. Der affiner Unterraum $L_0 + P$ ist parallel zu L und geht durch P. Jeder andere affine Unterraum mit dieser Eigenschaft muss aufgrund der vorherigen Bemerkung gleich sein. $\square$

Beispiel 1.2.41 (Zwei Geraden in $\mathbb{K}^n$)**.** Wir betrachten zwei verschiedene Geraden $L, M \subseteq \mathbb{K}^n, n \geq 2$.

- **Inzidente Geraden**: Wenn $L \cap M \neq \emptyset$, dann $L \cap M = \{P\}$, sonst müssen die zwei Geraden gleich sein. Dann $\dim L(M, N) = 1 + 1 - 0 = 2$. Diese zwei Geraden liegen auf einer gleichen Ebene (sie heißen koplanar)

- **Parallele Geraden**: Wenn $L \cap M = \emptyset$ und die Geraden parallel sind, dann $\dim L(L, M) = \dim(L_0 + M_0) + 1 = \dim L_0 + 1 = 2$. Diese zwei Geraden sind koplanar.

- **Windschiefe Geraden**: Wenn $L \cap M = \emptyset$ und L, M nicht parallel sind, dann heißen die Geraden windschief. Das ist möglich nur wenn $n \geq 3$. In diesem Fall, $\dim L(M, N) = \dim(M_0 + N_0) + 1 = 2 + 1 = 3$.

1.2.3 Lineare allgemeine Lage

Wir beginnen mit einer einfachen Beobachtung: Wenn wir einen Punkt hinzufügen, kann die Dimension der affinen Hülle höchstens um eins wachsen:

Lemma 1.2.42. *Sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Teilmenge und sei $P \in \mathbb{K}^n$ ein Punkt. Dann*

$$\dim L(S \cup \{P\}) = \begin{cases} \dim L(S) + 1, & \textit{falls } P \notin L(S) \\ \dim L(S), & \textit{falls } P \in L(S) \end{cases}$$

Beweis. Wir können annehmen dass S ein affine Unterräum $S = M$ ist (warum?), so dass $L(S) = L(M) = M$. Wir sehen dass

$$\dim L(M, P) = \begin{cases} \dim(M_0 + 0) + 1, & \text{falls } P \cap M = \emptyset \\ \dim(M_0 + 0), & \text{falls } P \cap M \neq \emptyset \end{cases}$$

und das ist was wir zeigen wollen. $\square$

Wir können dieses Lemma so verstehen, dass wir in der "allgemeinen" Situation von $P \notin L(S)$ eine "erwartete" Dimension $\dim L(S \cup \{P\}) = \dim L(S) + 1$ haben. Stattdessen haben wir in der "besonderen" Situation, $P \in L(S)$, die "unerwartete" Dimension $\dim L(S \cup \{P\}) = \dim L(S)$. Warum nennen wir den Fall $P \notin L(S)$ "allgemein"? Weil es in gewisser Weise "mehr" Punkte außerhalb von $L(S)$ als innerhalb von $L(S)$ gibt. Wenn wir zum Beispiel über $\mathbb{R}$ einen Punkt "zufällig" auswählen, wird er außerhalb von $L(S)$ liegen. Es gibt nur einen Fall, in dem diese Idee versagt: wenn $L(S) = \mathbb{K}^n$ bereits der ganze Raum ist.

Insbesondere betrachten wir Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots \in \mathbb{K}^n$. Für zwei Punkte ist die allgemeine Situation $\dim L(P_1, P_2) = 1$ und die spezielle Situation ist, dass $P_1 = P_2$. Zwei Punkte erzeugen also eine Gerade, außer wenn, die beiden Punkte gleich sind. Für drei Punkte ist die allgemeine Situation $\dim L(P_1, P_2, P_3) = 2$, und die spezielle Situation ist, dass $\dim L(P_1, P_2, P_3) = 1$: drei Punkte erzeugen eine Ebene, außer wenn, sie kollinear sind. Man beachte, dass es eine noch speziellere Situation $\dim L(P_1, P_2, P_3) = 0$ gibt, die dann und nur dann eintritt, wenn $P_1 = P_2 = P_3$. Jetzt machen wir daraus eine genaue Definition:

Korollar 1.2.43. *Seien $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}^n$. Dann*

$$\dim L(P_1, \dots, P_r) \leq r - 1$$

Beweis. Induktiv über r. Wenn $r = 1$, dann $\dim L(P_1) = \dim\{P_1\} = 0$. Wenn die Aussage wahr für $r-1$ ist, dann zeigt Lemma 1.2.42 dass $\dim L(P_1, \dots, P_r) \leq \dim L(P_1, \dots, P_{r-1}) + 1 \leq r - 1 + 1 = r$. □

Definition 1.2.44 (Lineare allgemeine Lage)**.** Seien $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}^n$ Punkte. Falls $r \leq n+1$, sagen wir dass die Punkte in linearer allgemeiner Lage sind, falls

$$\dim L(P_1, \dots, P_r) = r - 1$$

Falls $r > n+1$ sagen wir dass die Punkten in linearen allgemeinen Lage sind, falls jede Teilmenge $P_{i_1}, \dots, P_{i_{n+1}}$ in linearen allgemeinen Lage ist.

Lemma 1.2.45. *Sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Teilmenge von Punkte in linearer allgemeiner Lage. Dann ist jede Teilmenge $T \subseteq S$ auch in linearer allgemeiner Lage.*

Beweis. Wir müssen zeigen dass, wenn $r \leq n+1$ und $\dim L(P_1, \dots, P_r) = r - 1$, dann $\dim L(P_1, \dots, P_k) = k - 1$ für alle $k \leq r$. Es reicht, die Aussage für $k = r - 1$ zu zeigen. Dank Korollar 1.2.43, müssen wir zeigen, dass $\dim L(P_1, \dots, P_{r-1}) \geq r - 2$ und Lemma 1.2.42 zeigt dass

$$\dim L(P_1, \dots, P_{r-1}) \geq \dim L(P_1, \dots, P_r) - 1 = r - 1 - 1 = r - 2$$

□

Remark 1.2.46. Seien $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}^n$ Punkten. Dann

$$\dim L(P_1, \dots, P_r) = \dim\langle P_1 - P_r, \dots, P_{r-1} - P_r \rangle$$

so dass, wenn $r \leq n+1$, die Punkte $P_1, \dots, P_r$ sind in linearer allgemeiner Lage, genau dann, wenn die Vektoren $P_1 - P_r, \dots, P_{r-1} - P_r$ linear unabhängig sind. Man kann auch die Lemmata und der Korollar in dieser Sektion durch die Eigenschaften der linear Unabhängigkeit zeigen.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 5.11.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

1.3 Affine Abbildungen

Definition 1.3.1 (Affine Abbildung)**.** Eine Abbildung $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist affin, wenn F die folgende Form hat

$$f = f_{A,v}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \qquad x \mapsto Ax + v, \qquad A \in \mathbb{K}^{m\times n}, v \in \mathbb{K}^m$$

Beispiel 1.3.2. Lineare Abbildungen $A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ sind affin, und translationen $t_v\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit $v \in \mathbb{K}^n$ sind affin:

$$A = f_{A,0}, \qquad t_v = f_{I_n,v}$$

Wir sehen dass eine affine Abbildung $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linear ist, genau dann, wenn $f(0) = 0$.

Bemerkung 1.3.3. Eine affine Abbildung ist die Komposition einer linearen Abbildung $x \mapsto Ax$ mit einer Translation $y \mapsto y + v$.

Bemerkung 1.3.4. Anders gesagt, eine affine Abbildung ist eine Abbildung mit der Form

$$f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + v_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + v_m \end{pmatrix}$$

Lemma 1.3.5. 1. *Die Komposition von affine Abbildungen ist affin: wenn $f_{A,v}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ und $f_{B,w}\colon \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^n$ affine Abbildungen sind, dann ist*

$$f_{A,v} \circ f_{B,w} = f_{AB,Aw+v}$$

auch affin.

2. *$f_{A,v}$ is injektiv (bzw. surjektiv) genau dann, wenn $f_{A,0} = A$ injektiv (bzw. surjektiv) ist.*

3. *Eine affine Abbildung $f_{A,b}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist invertierbar, genau dann, wenn $n = m$ und $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Die inverse Abbildung ist*

$$f_{A,v}^{-1} = f_{A^{-1},-A^{-1}v}$$

Insbesondere ist die inverse einer affine Abbildung wieder affin.

Beweis. 1. $(f_{A,v} \circ f_{B,w})(x) = f_{A,v}(Bx + w) = ABx + Aw + w$.

2. Da t_{-v} invertierbar ist, sehen wir dass $f_{A,v}$ is injektiv (bzw. surjektiv) ist, genau dann, wenn $f_{A,0} = t_{-v} \circ f_{A,v}$ injektiv (bzw. surjektiv) ist.

3. Wenn $f_{A,v}$ invertierbar ist, dann ist $t_{-b} \circ f_{A,v} = f_{A,0}$ linear und invertierbar. Das bedeutet, dass $n = m$, dass $A \in GL_n(\mathbb{K})$ und dass $f_{A,b}^{-1} = (t_b \circ f_{A,0})^{-1} = f_{A^{-1},0} \circ t_{-b} = f_{A^{-1},-A^{-1}b}$

□

Definition 1.3.6 (Affine Transformation)**.** Eine affine Transformation oder Affinität von $\mathbb{K}^n$ ist eine invertierbare affine Abbildung

$$f_{A,v}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \qquad A \in GL_n(\mathbb{K}), v \in \mathbb{K}^n$$

Die Menge von allen affine Transformationen ist $\mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n)$.

Bemerkung 1.3.7. Die Menge $\mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n)$ ist eine Gruppe mit der Komposition. Wie in der Bemerkung 1.1.24, es gibt eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{K}^n \to \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n) \to GL_n(\mathbb{K}) \to 1$$

und diese Gruppe ist ein semidirektes Produkt $\mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n) = \mathbb{K}^n \ltimes GL_n(\mathbb{K})$.

Beispiel 1.3.8 (Zentrische Streckungen)**.** Eine Zentrische Streckung oder eine Homotethie ist eine affine Transformation $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit der Form

$$f(x) = \lambda \cdot (x - v_0) + v_0 \text{ für } \lambda \in \mathbb{K}^\times, v_0 \in \mathbb{K}^n$$

Wir sehen dass $f(v_0) = v_0$ und dass $f(v_0 + w) = \lambda w$ für alle $w \in \mathbb{K}^n$: Diese affine Transformation "streckt" die durch v_0 verlaufenden Linien um einen Faktor λ. Das ist was passiert, wenn wir die "Pinch-to-Zoom"-Bewegung auf dem Bildschirm eines Smartphones ausführen

Satz 1.3.9. *Seien $P_1, \ldots, P_{n+1} \in \mathbb{K}^n$ Punkte in linearer allgemeiner Lage und seien $Q_1, \ldots, Q_{n+1} \in \mathbb{K}^m$ beliebige Punkte. Es gibt eine einzige affine Abbildung $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ so dass*

$$f(P_i) = Q_i \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, n+1$$

Außerdem, ist f invertierbar, genau dann, wenn $n = m$ und $Q_1, \ldots, Q_{n+1}$ in linearer allgemeiner Lage sind.

Beweis. Wir sehen dass eine affine Abbildung $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ hat die Eigenschaft dass $f(P_i) = Q_i$ genau dann, wenn die affine Abbildung $g = t_{-Q_{n+1}} \circ f \circ t_{P_{n+1}}$ die Eigenschaft $g(P_i - P_{n+1}) = Q_i - Q_{n+1}$ hat. Insbesondere $g(0) = g(P_{n+1} - P_{n+1}) = Q_{n+1} - Q_{n+1} = 0$ so dass g linear ist. Da die Punkte $P_1, \ldots, P_{n+1}$ in linearer allgemeiner Lage sind, sind die Vektoren $P_1 - P_{n+1}, \ldots, P_n - P_{n+1}$ linear unabhängig, und das bedeutet dass diese Vektoren eine Basis von $\mathbb{K}^n$ sind. Dann existiert eine einzige lineare Abbildung $g\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ so dass $g(P_i - P_{n+1}) = Q_i - Q_{n+1}$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Wir sehen auch dass f invertierbar ist genau dann wenn g invertierbar ist, weil Translationen invertierbar sind. Da g linear ist, sehen wir dass g invertierbar ist, genau dann, wenn $n = m$ und $Q_1 - Q_{n+1}, \ldots, Q_n - Q_{n+1}$ eine Basis von $\mathbb{K}^m$ sind, was bedeutet dass $Q_1, \ldots, Q_{n+1}$ in linearer allgemeiner Lage sind. □

Lemma 1.3.10. *Sei $f = f_{A,v}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ eine affine Abbildung. Seien auch $L \subseteq \mathbb{K}^n, M \subseteq \mathbb{K}^m$ affine Unterräume mit assoziierte Untervektorräume L_0, M_0.*

1. *Das Bild $f(L)$ ist ein affiner Unterraum, mit assoziierte Untervektorraum $f(L)_0 = A(L_0)$.*
2. *Es gilt dass $\dim f(L) = \dim L - \dim L_0 \cap \operatorname{Ker} A$. Insbesondere $\dim f(L) = \dim L$ wenn f injektiv ist.*
3. *Das Urbild $f^{-1}(M)$ ist affiner Unterraum, und wenn $f^{-1}(M) \neq \emptyset$ ist der zugehörige Untervektorraum $f^{-1}(M)_0 = A^{-1}(M_0)$[1].*
4. *Insbesondere, wenn $P \in \mathbb{K}^m$ und $f^{-1}(P) \neq \emptyset$, dann $f^{-1}(P)_0 = \operatorname{Ker} A$.*
5. *Wenn $f^{-1}(M) \neq \emptyset$, dann $\dim f^{-1}(M) = \dim M \cap f(\mathbb{K}^n) + \dim \operatorname{Ker} A$. Insbesondere $\dim f^{-1}(M) = \dim M + \dim \operatorname{Ker} A$ wenn f surjektiv ist.*
6. *Wenn $L' \subseteq \mathbb{K}^n$ affin und parallel zu L ist, Dann sind $f(L), f(L')$ auch Parallel. Wenn $M' \subseteq \mathbb{K}^m$ affin und parallel zu M ist, dann sind $f^{-1}(M), f^{-1}(M')$ auch Parallel.*
7. *Sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Teilmenge. Dann $f(L(S)) = L(f(S))$.*

[1] Hier schreiben wir A^{-1} für das Urbild von der Abbildung $A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, nicht für die inverse Matrix A^{-1}

Beweis.

1. Sei $P \in L$ so dass $L = L_0 + P$. Dann $f(L) = A(L) + b = A(L_0 + P) + b = A(L_0) + AP + b$.
2. Wir sehen dass $\dim A(L_0) = \dim L_0 - \dim \operatorname{Ker} A \cap L_0$.
3. Wir nehmen an, dass $f^{-1}(M) \neq \emptyset$: sei $u \in f^{-1}(M)$, so dass $f(u) = Au + v = w \in M$. Dann $M = M_0 + w$, und $f^{-1}(M) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax + v \in M_0 + w\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax + v - w \in M_0\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax - Au \in M_0\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A(x-u) \in M_0\} = A^{-1}(M_0) + u$
4. Konsequenz von (3).
5. Mit der gleichen Notation wie im Punkt (3) sehen wir, dass $\dim A^{-1}(M_0) = \dim A(\mathbb{K}^n) \cap M_0 + \dim \operatorname{Ker} A$. Wir sehen nun, dass $\dim A(\mathbb{K}^n) \cap M_0 = \dim(A(\mathbb{K}^n - u) \cap (M - w)) = \dim(A(\mathbb{K}^n) - Au + w) \cap M = \dim(A(\mathbb{K}^n) + v) \cap M = \dim f(\mathbb{K}^n) \cap M$
6. Konsequenz von (3) und (5).
7. $f(L(S))$ ist affin und $f(L(S)) \supseteq S$, so dass $f(L(S)) \supseteq L(f(S))$. Andererseits, wenn $M \subseteq \mathbb{K}^m$ affin ist, und $M \supseteq f(S)$, dann $f^{-1}(M) \supseteq S$, so dass $f^{-1}(M) \supseteq L(S)$. Das zeigt, dass $M \supseteq f(L(S))$.

□

Eine wichtige Beispiel von affine Abbildungen sind Parallelprojektionen:

Komplementäre affine Unterräume und Parallelprojektionen

Definition 1.3.11 (Komplementäre affine Unterräume)**.** Sei $M \subseteq \mathbb{K}^n$ ein affiner Unterraum. Ein affiner Unterraum $N \subseteq \mathbb{K}^n$ ist komplementär zu M, wenn $\dim M + \dim N = n$ und $M \cap N = \{P\}$ ein Punkt.

Lemma 1.3.12. *Seien $M, N \in \mathbb{K}^n$ nicht-leere affine Unterräume und seien M_0, N_0 die zugehörigen Untervektorräume. Die Unterräume M, N sind komplementär, genau dann, wenn M_0, N_0 komplementäre Untervektorräume sind: $\mathbb{K}^n = M_0 \oplus N_0$. Insbesondere hat M immer einen komplementären Unterraum.*

Beweis. Wenn M, N Komplementär sind, dann $\dim(M_0 + N_0) = \dim L(M, N) = \dim M_0 + \dim N_0 = n$, so dass $M_0 \oplus N_0 = \mathbb{K}^n$. Andererseits, wenn $M_0 \oplus N_0 = \mathbb{K}^n$, dann $\dim(M_0 + N_0) \leq \dim L(M, N) \leq n = \dim(M_0 + N_0)$, so dass $M \cap N \neq \emptyset$ und $\dim M \cap N = 0$. Da M_0 immer einen komplementären Untervektorraum hat, sehen wir dass M immer einen komplementären affinen Unterraum hat. □

Beispiel 1.3.13. Seien $L \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Gerade und $H \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Hyperebene die nicht parallel sind. Dann sind L und H komplementär, da $\dim L_0 + N_0 = n$. Insbesondere $L \cap H = \{P\}$ ein Punkt.

Sei nun $M \subseteq \mathbb{K}^n$ ein affiner Unterraum, mit assoziierter Untervektorraum M_0 und sei $N \subseteq \mathbb{K}^n$ ein komplementärer Unterraum. Für jede $P \in \mathbb{K}^n$ sei $M_0 + P$ der einziger affiner Unterraum mit der gleichen Dimension von M, der parallel zu M ist und durch P geht. Dann sind $M_0 + P$ und N auch komplementär, dank dem vorherigen Lemma, so dass $(M_0 + P) \cap N$ ein Punkt ist. Wir nennen diesen Punkt $\pi_{M,N}(P)$: $(M_0 + P) \cap N = \{\pi_{M,N}(P)\}$. Das definiert eine Parallelprojektion

$$\pi_{M,N} \colon \mathbb{K}^n \longrightarrow N$$

Beispiel 1.3.14. Sei $M = \{x + y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und sei $N = \{x - y = 1\} \in \mathbb{R}^2$. Diese zwei affine Unterräume sind komplementär. Sei $P = (x_0, y_0)$ und sei $M + P_0 = \{x + y = x_0 + y_0\}$ die Gerade parallel zu M die durch P_0 geht. Dann $(M + P_0) \cap N = \{\left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0 + 1), \frac{1}{2}(x_0 + y_0 - 1)\right)\}$, so dass

$$\pi_{M,N} \colon \mathbb{R}^2 \to N, \qquad (x_0, y_0) \mapsto \left(\frac{1}{2}(x_0 + y_0 + 1), \frac{1}{2}(x_0 + y_0 - 1)\right)$$

Wir sehen dass diese Abbildung affin ist. Das ist kein Zufall

Proposition 1.3.15. *Eine Parallelprojektion ist eine affine Abbildung: Sei $\pi_{N_0} \colon \mathbb{K}^n \to N_0$ die lineare Projektion, die von der direkten Summe $\mathbb{K}^n = M_0 \oplus N_0$ definiert ist, und sei $Q_0 = M_0 \cap N$. Dann*

$$\pi_{M,N}(P) = \pi_{N_0}(P) + Q_0$$

Außerdem, wenn $N = Q + N_0$, gilt es dass

$$\pi_{M,N}(P) = \pi_{N_0}(P - Q) + Q$$

Beweis. Wir zeigen dass eine Parallelprojektion, gesehen als eine Abbildung $\pi_{M,N} \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, eine affine Abbildung ist. Sei $Q_0 = \pi_{M,N}(0) = M_0 \cap N$, so dass $N = N_0 + Q_0$ Sei $P \in \mathbb{K}^n$, dann

$$\pi_{M,N}(P) = (M_0 + P) \cap N = (M_0 + P) \cap (N_0 + Q_0) = ((M_0 + P - Q_0) \cap N_0) + Q_0 = ((M_0 + P) \cap N_0) + Q_0$$

Da $\mathbb{K}^n = M_0 \oplus N_0$, haben wir die zwei lineare Projektionen $\pi_{M_0} \colon \mathbb{K}^n \to M_0, \pi_{N_0} \colon \mathbb{K}^n \to N_0$ so dass $P = \pi_{M_0}(P) + \pi_{N_0}(P)$. Dann

$$(M_0 + P) \cap N_0 = (M_0 + \pi_{M_0}(P) + \pi_{N_0}(P)) \cap N_0 = (M_0 + \pi_{N_0}(P)) \cap N_0 = \{\pi_{N_0}(P)\}$$

so dass

$$\pi_{M,N}(P) = \pi_{N_0}(P) + Q_0$$

und das zeigt dass $\pi_{M,N}$ affin ist, mit der Form das wir wollen. Nehmen wir nun an, dass $N = N_0 + Q$, wir müssen zeigen dass $Q_0 = Q - \pi_{N_0}(Q)$, was bedeutet $Q - \pi_{N_0}(Q) \in M_0 \cap N$: da $\pi_{N_0}(Q) \in N_0$, sehen wir dass $Q - \pi_{N_0}(Q) \in N$,und da $Q - \pi_{N_0}(Q) = \pi_{M_0}(Q)$, sehen wir dass $\pi_{M_0}(Q) \in M_0$. □

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 7.11.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Das Teilverhältnis und der Satz von Thales

Seien $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{K}^n$ drei paarweise verschiedene und kollineare Punkte. Dann sind die zwei Vektoren $P_1 - P_3, P_2 - P_3$ linear abhängig:

$$P_1 - P_3 = \lambda \cdot (P_2 - P_3) \qquad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$$

Definition 1.3.16 (Teilverhältnis von drei kollineare Punkte)**.** Der obige Skalar $\lambda \in \mathbb{K} \setminus 0, 1$ wird als das Teilverhältnis der drei geordneten kollineare und paarweise verschiedene Punkte (P_1, P_2, P_3) bezeichnet. Wir bezeichnen es auch mit

$$\frac{P_1 - P_3}{P_2 - P_3} = \lambda$$

Bemerkung 1.3.17. Wir sehen dass

$$\frac{P_1 - P_3}{P_2 - P_3} = \lambda \qquad \Longleftrightarrow \qquad P_3 = \frac{1}{1-\lambda} P_1 - \frac{\lambda}{1-\lambda} P_2$$

Beispiel 1.3.18. Sei $v \in \mathbb{K}^n, v \neq 0$ ein Vektor. Das Teilverhältnis von $(\lambda v, v, 0)$ ist λ.

Lemma 1.3.19. *Sei $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n)$ und seien $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{K}^n$ kollinear. Dann sind $f(P_1), f(P_2), f(P_3)$ auch kollinear und das Teilverhältnis ist unverändert*

$$\frac{P_1 - P_3}{P_2 - P_3} = \frac{f(P_1) - f(P_3)}{f(P_2) - f(P_3)}$$

Beweis. Sei $\lambda = \frac{P_1 - P_3}{P_2 - P_3}$, so dass $P_1 - P_3 = \lambda \cdot (P_2 - P_3)$. Sei $f(x) = Ax + v$ mit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Dann

$$f(P_1) - f(P_3) = A(P_1 - P_3) = A(\lambda \cdot (P_2 - P_3)) = \lambda \cdot A(P_2 - P_3) = \lambda \cdot (f(P_2) - f(P_3))$$

so dass $\lambda = \frac{f(P_1) - f(P_3)}{f(P_2) - f(P_3)}$ □

Satz 1.3.20 (Satz von Thales)**.** *Seien $H_1, H_2, H_3 \subseteq \mathbb{K}^n$ drei parallele und paarweise verschiedene Hyperebene und seien $L, L' \subseteq \mathbb{K}^n$ zwei Gerade die nicht parallel zu ihnen sind. Seien $P_i = L \cap H_i, P_i' = L' \cap H_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann*

$$\frac{P_1 - P_3}{P_2 - P_3} = \frac{P_1' - P_3'}{P_2' - P_3'}$$

Anders gesagt, ist das Teilverhältnis nur abhängig von H_1, H_2, H_3 und nicht von den Geraden.

Beweis. Eine affine Transformation lässt das Teilverhaltnis unverändert, so dass wir annehmen können, dass $H_i = \{x_n = b_i\}$ für $b_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, 3$. Wir schreiben $L = \{tv + Q \,|\, t \in \mathbb{K}\}$ für $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ und $Q = (Q_1, \ldots, Q_n) \in \mathbb{K}^n$. Wir sehen dass mit $v_n \neq 0$, weil L nicht parallel zu H_i ist. Dann $P_i = t_i v + Q$, mit $t_i v_n + Q_n = b_i$ für $i = 1, 2, 3$: das bedeutet $t_i = \frac{b_i - Q_n}{v_n}$ für $i = 1, 2, 3$. Dann $P_i - P_3 = (t_i - t_3)$ für $i = 1, 2$, und

$$\frac{P_1 - P_3}{P_2 - P_3} = \frac{t_1 - t_3}{t_2 - t_3} = \frac{\frac{b_2 - Q_n}{v_n} - \frac{b_3 - Q_n}{v_n}}{\frac{b_2 - Q_n}{v_n} - \frac{b_3 - Q_n}{v_n}} = \frac{b_2 - b_3}{b_1 - b_3}$$

Das ist nur abhängig von b_1, b_2, b_3, und nicht von L. □

1.3.1 Von der affinen Geometrie zur linearen Algebra

Bisher haben wir die affine Geometrie mit Hilfe der linearen Algebra untersucht, was bedeutet, dass alle unsere Techniken und Konzepte auf den folgenden zwei grundlegenden Konstruktionen:

- Die Summe $v + w$ von zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{K}^n$
- Die Skalarmultiplikation $\lambda \cdot v$, von $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in \mathbb{K}^n$.

Es stellt sich heraus, dass wir den umgekehrten Weg gehen können: wir können die Summe und die Skalarmultiplikation geometrisch erhalten. Genauer gesagt, nehmen wir an, dass wir Folgendes tun können:

0. Wenn $P \in \mathbb{K}^n$ ein Punkt und $L \subseteq \mathbb{K}^n$ eine Gerade ist, können wir überprüfen ob $P \in L$.

1. Wir können die einzige Gerade $L(P, Q)$ zwischen zwei verschiedene Punkte $P, Q \in \mathbb{K}^n$ konstruieren.

2. Wenn zwei verschiedene Linien L, L' inzident sind, können wir den einzigen Schnittpunkt $P = L \cap L'$ konstruieren.

3. Wir haben drei nicht kollineare Punkte. Insbesondere sind wir in $\mathbb{K}^n$, mit $n \geq 2$.

4. Bei einer Linie $L \subseteq \mathbb{K}^n$ und einem Punkt $P \notin L$ können wir die einzige Linie parallel zu L konstruieren, die durch P geht.

5. Es gibt einen festen Vektor $v_0 \in \mathbb{K}^n, v_0 \neq 0$, für den wir alle Vielfaches $\lambda \cdot v_0$ mit $\lambda \in \mathbb{K}$ haben. Insbesondere haben wir 0.

Proposition 1.3.21. *Mit der vorherigen Hypothese, wenn wir zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{K}^n$ haben, dann können wir die Summe $v + w$ konstruieren.*

Beweis. Dieser Beweis ist sehr geometrisch und sollte zusammen mit Bildern (siehe Tafel) betrachtet werden.

Nehmen wir zuerst an dass v, w linear unabhängig sind (das können wir überprüfen, denn es bedeutet, dass $w \notin L(0, v)$). Wir wissen dass $v + w = (L(0, v) + w) \cap (L(0, w) + v)$. Wir können die Gerade $L(0, v) + w$ konstruieren, weil sie die einzige Gerade parallel zu $L(0, v)$ und die durch w geht ist. Auf die gleiche Weise, können wir die Gerade $L(0, w) + w$ auch konstruieren. Dann können wir den einzigen Schnittpunkt $v + w$ konstruieren.

Wenn v, w linear abhängig sind, dann haben wir $u \in \mathbb{K}^n$ die linear unabhängig von v, w ist, weil wir drei nicht-kollineare Punkte haben. Wir können $v + u$ konstruieren, weil v, u linear unabhängig sind. Wir können auch die Gerade $L(0, w - u) + u + v$ konstruieren, weil diese die einzige parallele Gerade zu $L(u, w)$ die durch $u + v$ geht ist. Wir können denn den einzigen Schnittpunkt $v + w = L(v, w) \cap (L(0, w - u) + u + v)$ konstruieren. □

Proposition 1.3.22. *Mit der vorherigen Hypothese, wenn wir einen Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ haben und einen Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ haben, dann können wir das Vielfaches $\lambda \cdot v$ konstruieren.*

Beweis. Dieser Beweis ist sehr geometrisch und sollte zusammen mit Bildern (siehe Tafel) betrachtet werden.

Wir können annehmen dass v und v_0 linear unabhängig sind. Wir können $\lambda \cdot v_0$ konstruieren und auch die Gerade $L = L(v, v_0)$. Dann können wir die parallele Gerade L_0 durch 0 und die parallele Gerade $L_{\lambda \cdot v_0}$ konstruieren. Der Satz von Thales zeigt dass $L_{\lambda \cdot v_0} \cap L(0, v) = \lambda \cdot v$ und wir können das konstruieren. □

Dies zeigt, dass geometrische Eigenschaften algebraische Eigenschaften bestimmen. Ein weiteres Ergebnis in diesem Sinne ist:

Satz 1.3.23 (Fundamentalsatz der reelle affine Geometrie)**.** *Sei $n \geq 2$ und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare Abbildung so dass, wenn $L \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Gerade ist, dann ist $f(L)$ eine Gerade. Dann ist f eine affine Transformation.*

Dieses Ergebnis kann in Anlehnung an die vorhergehenden Sätze bewiesen werden. Wir werden den Beweis für das Ende des Kurses aufheben, wenn wir genug Zeit haben. Es ist sogar sehr empfehlenswert, dass Sie versuchen, es selbst zu beweisen!

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 12.11.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

1.4 Affine Geometrie in euklidischen Räumen

Definition 1.4.1 (Euklidischer Raum)**.** Der euklidische Raum mit Dimension n ist der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$ zusammen mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle u, v\rangle = u^t v = \sum_{i=1}^n u_i v_i$

Bemerkung 1.4.2. Dies ist nur ein euklidischer Vektorraum, die allgemeine Definition ist die eines reellen oder komplexen Vektorraums, der mit einem Skalarprodukt ausgestattet ist. Wir werden jedoch aus Gründen der Konkretheit auf den Fall von $\mathbb{R}^n$ konzentrieren.

Definition 1.4.3 (Euklidische Norm und Abstand)**.** Die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} \qquad \text{für alle } u \in \mathbb{R}^n$$

Der euklidische Abstand ist

$$d(P, Q) = \|P - Q\| \qquad \text{für alle } P, Q \in \mathbb{R}^n$$

Bemerkung 1.4.4. Der Raum $\mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Abstand ist ein metrischer Raum. Insbesondere gilt die Dreiecksungleichung:

$$d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$$

Wir wissen auch aus der linearen Algebra, dass die Gleichung $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$ gilt, genau dann, wenn R auf der Strecke

$$[P, Q] = \{tP + (1 - t)Q \,|\, t \in [0, 1]\}$$

liegt (wenn das nicht bekannt ist, dann ist es eine Hausaufgabe).

Bemerkung 1.4.5. Der Abstand ist invariant für Translationen: für alle $P, Q, R \in \mathbb{R}^n$ gilt dass

$$d(P - R, Q - R) = \|(P - R) - (Q - R)\| = \|P - Q\| = d(P, Q)$$

Bemerkung 1.4.6. Wir erinnern uns an die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \qquad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R}^n$$

Insbesondere

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1, \qquad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Definition 1.4.7 (Winkel)**.** Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren ungleich Null. Der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist der einzige $\theta \in [0, \pi]$, für den gilt

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

1.4.1 Orthogonalität und Abstand zwischen affine Unterräume

Definition 1.4.8 (Orthogonalität)**.** Zwei Vektoren u, v sind orthogonal, genau dann, wenn $\langle u, v\rangle = 0$. Zwei Untervektorräume U, V sind orthogonal, genau dann, wenn $\langle u, v\rangle = 0$ für alle $u \in U, v \in V$. Zwei affine Unterräume $M, N \subseteq \mathbb{E}^n$ sind orthogonal, genau dann, wenn die assoziierte Untervektorräume orthogonal sind.

Bemerkung 1.4.9. Zwei nicht null Vektoren sind orthogonal genau dann, wenn der Winkel zwischen den beiden $\frac{\pi}{2}$ ist.

Definition 1.4.10 (Orthogonales Komplement)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Der Untervektorraum

$$U^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, v\rangle = 0 \qquad \text{für alle } u \in U\}$$

is das orthogonales Komplement von $\mathbb{R}^n$. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein affiner Unterraum. Ein orthogonales Komplement von M ist ein komplementäre affine Unterraum, der orthogonal zu M ist.

Bemerkung 1.4.11. Zwei affine Unterräume $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ sind orthogonal genau dann, wenn $N_0 \subseteq M_0^\perp$. Das bedeutet dass N_0 und $M_0^\perp$ parallel sind. Insbesondere, alle orthogonale Komplemente von M haben die Form $M_0^\perp + u$ für ein $u \in \mathbb{K}^n$.

Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ein nicht leere affine Unterraum. Der Unterraum $N_0^\perp$ ist ein orthogonales Komplement von N. Dann haben wir die Parallelprojektion

$$\pi_{N_0^\perp, N} \colon \mathbb{R}^n \to N$$

definiert. Wir haben auch gesehen dass, für jedes $Q \in N$, gilt dass

$$\pi_{N_0^\perp, N}(P) = \pi_{N_0}(P - Q) + Q,$$

wobei $\pi_{N_0} \colon \mathbb{R}^n \to N_0$ die orthogonale lineare Projektion ist, die von der Dekomposition $\mathbb{R}^n = N_0^\perp \oplus N_0$ definiert ist. Insbesondere sehen wir dass

$$P - \pi_{N_0^\perp, N}(P) = (P - Q) - \pi_{N_0}(P - Q) = \pi_{N_0^\perp}(P - Q)$$

orthogonal zu N ist.

Definition 1.4.12 (Orthogonale Projektion)**.** Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ein nicht leerer affiner Unterraum. Die Parallelprojektion

$$\pi_{N_0^\perp, N} \colon \mathbb{R}^n \to N$$

heißt die orthogonale Projektion auf N.

Bemerkung 1.4.13. Wir erinnern uns, dass die lineare orthogonale Projektion $\pi_{N_0} \colon \mathbb{R}^n \to N_0$ über eine orthogonale Basis $v_1, \ldots, v_r$ berechnet werden kann als

$$\pi_{N_0}(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, v_i\rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i$$

Wenn $N = Q + N_0$ können wir denn die orthogonale Projektion $\pi_{N_0^\perp, N} \colon \mathbb{R}^n \to N$ wie folgt berechnen:

$$\pi_{N_0^\perp, N}(P) = \pi_{N_0}(P - Q) + Q = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle P - Q, v_i\rangle}{\|v_i\|^2} v_i + Q$$

Beispiel 1.4.14. Wir betrachten die Ebene $H = \{x = 1\} \subseteq \mathbb{E}^3$. Eine orthonormale Basis von $H_0 = \{x = 0\}$ ist (e_2, e_3) und $Q = (1, 0, 0) \in H$. Die orthogonale Projektion $\pi_{H_0^\perp, H} \colon \mathbb{E}^3 \to H$ ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die Gerade $L = \{(t+1, -t, 1) \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{E}^3$. Eine orthogonale Basis von L_0 ist $v = (1, -1, 0)$, mit $\|v\|^2 = 2$. Wir haben auch einen Punkt $(1, 0, 1) \in L$. Die orthogonale Projektion $\pi_{L_0^\perp, L} \colon \mathbb{E}^3 \to L$ ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.4.15. *Sei $N \subseteq \mathbb{E}^n$ ein affiner Unterraum und sei $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Der Punkt $\pi_{N_0^\perp, N}(P)$ ist der einzige Punkt auf N, der am nächsten an P liegt:*

$$\|P - \pi_{N_0^\perp, N}(P)\| \leq \|P - Q\| \qquad \textit{für alle } Q \in N$$

und die Gleichung gilt genau dann, wenn $Q = \pi_{N_0^\perp, N}(P)$.

Beweis. Durch die Translation t_{-P}, können wir annehmen, dass $P = 0$. Sei denn $Q_0 = \pi_{N_0^\perp, N}(0) = N_0^\perp \cap N$. Wir haben $N = Q_0 + N_0$ und wir müssen zeigen, dass $\|Q_0\| \leq \|Q_0 + v\|$ für alle $v \in N_0$, mit Gleichung genau dann, wenn $v = 0$. Um dies zu beweisen, können wir beide Seiten quadrieren und da $Q_0 \in N_0^\perp$, sehen wir dass

$$\|Q_0 + v\|^2 = \|Q\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle Q_0, v\rangle = \|Q_0\|^2 + \|v^2\| \geq \|Q_0\|^2$$

mit Gleichung genau dann, wenn $\|v\|^2 = 0$, was bedeutet $v = 0$. □

Definition 1.4.16 (Abstand zwischen einem Punkt und einem affinen Unterraum)**.** Seien $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ein affiner Unterraum. Die Abstand zwischen P und N ist

$$d(P, N) = \min\{d(P, Q) \,|\, Q \in N\}$$

Der vorherige Satz zeigt, dass dieses Minimum nur an dem Punkt $\pi_{N_0^\perp, N}(P) \in N$ erreicht ist:

$$d(P, N) = \|P - \pi_{N_0^\perp, N}(P)\| = \|(P - Q) - \pi_{N_0}(P - Q)\| = \|\pi_{N_0^\perp}(P - Q)\|$$

für alle $Q \in N$.

Bemerkung 1.4.17. Wenn $Q \in N$, sehen wir dass $Q = \pi_{N_0^\perp, N}(P)$ genau dann, wenn die Gerade $L(P, Q)$ orthogonal zu N ist.

Beweis. Sei $Q_0 = \pi_{N_0^\perp, N}(P)$. Wir sehen dass $P - Q_0 = \pi_{N_0}^\perp(P - Q_0)$ orthogonal zu N ist. Andererseits, sei $Q \in N$, so dass $Q = Q_0 + v$ mit $v \in N_0$. Dann ist $P - Q = P - Q_0 + v$ in $N_0^\perp$ genau dann, wenn $v_0 \in N_0^\perp$ ist. Das bedeutet $v = 0$. □

Bemerkung 1.4.18. Wir sehen dass $d(P, N) = 0$ genau dann, wenn $P \in N$.

Beispiel 1.4.19. Seien H und L wie im Beispiel 1.4.14, und sei $P = (2, 2, 2) \in \mathbb{E}^3$. Wir sehen dass

$$d(P, H) = \|P - \pi_{H_0^\perp, H}(P)\| = \|(1, 0, 0)\| = 1.$$
$$d(P, L) = \|P - \pi_{L_0^\perp, L}(P)\| = \|(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1)\| = \frac{\sqrt{22}}{4}.$$

Wir können auch die Abstand zwischen zwei beliebige affine Unterräume betrachten

Proposition 1.4.20. *Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei nicht-leere affine Unterräume mit assoziierte Untervektorräume M_0, N_0.*

1. *Seien $P \in M, Q \in N$. Es gilt dass $d(P, Q) \leq d(P', Q')$ für alle P,genau dann, wenn die Gerade $L(P, Q)$ orthogonal zu beiden M und N ist.*

2. *Es gibt Punkte $P \in M, Q \in N$ mit die Eigenschaft in (1), und diese Punkten sind eindeutig bestimmt, genau dann, wenn $M_0 \cap N_0 = \{0\}$.*

Beweis. 1. Nehmen wir an, dass die Gleichung $d(P, Q) \leq d(P', Q')$ für alle $P' \in M, Q' \in N$ gilt. Das bedeutet insbesondere dass $d(P, Q) = d(P, N)$, so dass die Gerade $L(P, Q)$ orthogonal zu N ist. Eine symmetrische Begrundung zeigt, dass die Gerade $L(P, Q)$ orthogonal zu N ist.

   Andererseits, nehmen wir an, dass $L(P, Q)$ orthogonal zu M und N ist. Das bedeutet, dass $P - Q \in M_0^\perp \cap N_0^\perp$. Punkte $P' \in M, Q' \in N$ haben die Form $P' = P + v, Q' = Q + w$ für $v \in M_0, w \in N_0$. Wir sehen dass

$$\begin{aligned}\|P' - Q'\|^2 = \|P - Q + v - w\|^2 &= \|P - Q\|^2 + \|v - w\|^2 + 2\langle P - Q, v - w\rangle \\ &= \|P - Q\|^2 + \|v - w\|^2 \geq \|P - Q\|^2.\end{aligned}$$

   mit Gleichung genau dann, wenn $v = w$. Insbesondere können wir P', Q' finden, verschiedene von P, Q und mit $\|P' - Q'\| = \|P - Q\|$, genau dann, wenn $M_0 \cap N_0 \neq \{0\}$.

2. Wir müssen zeigen dass Punkte $P \in M, Q \in N$ mit $L(P, Q)$ orthogonal zu M_0 und N_0 existieren. Die Gerade $L(P, Q)$ ist orthogonal zu M und N genau dann, wenn $P = u + Q$ mit $u \in M_0^\perp \cap N_0^\perp = (M_0 + N_0)^\perp$. Das bedeutet, dass $P \in (M_0^\perp \cap N_0^\perp + N) \cap M$. Die Menge $M_0^\perp \cap N_0^\perp + N$ ist ein affiner Unterraum mit assoziierte Untervektorraum $M_0^\perp \cap N_0^\perp + N_0$ und wenn $(M_0^\perp \cap N_0^\perp + N) \cap M = \emptyset$, dann

$$\begin{aligned}\dim L(M_0^\perp \cap N_0^\perp + N, M) &= \dim(M_0^\perp \cap N_0^\perp + M_0 + N_0) + 1 \\ &= \dim((M_0 + N_0)^\perp + (M_0 + N_0)) + 1 = n + 1\end{aligned}$$

   unmöglich. Wir haben schon gezeigt, dass solche Punkte P, Q eindeutig sind, genau dann, wenn $M_0 \cap N_0 = 0$.

□

Definition 1.4.21 (Abstand zwischen affine Unterräume)**.** Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei nicht-leere affine Unterräume. Der Abstand zwischen M, N ist:

$$d(M, N) = \min\{d(P, Q) \mid P \in M, Q \in N\}$$

Bemerkung 1.4.22. Wir sehen dass $d(M,N)=0$ genau dann, wenn $M\cap N\neq\emptyset$.

Bemerkung 1.4.23. Seien $P\in M, Q\in N$. Dann $d(P,Q)=d(M,N)$ genau dann, wenn die Gerade $L(P,Q)$ orthogonal zu M und N ist.

Beispiel 1.4.24. Seien $L_1,L_2\subseteq\mathbb{R}^n$ zwei windschiefe Geraden, durch Parametrisierungen gegeben:

$$L_1=\langle v_1\rangle+P_1,\quad L_2=\langle v_2\rangle+P_2$$

Da L_1,L_2 windschief sind, existieren einzige Punkte $Q_1\in L_1, Q_2\in L_2$ so dass $d(Q_1,Q_2)=d(L_1,L_2)$. Diese sind genau die Punkte so dass Q_1-Q_2 orthogonal zu v_1,v_2 ist. Wir suchen also $Q_1=t_1v_1+P_1, Q_2=t_2v_2+Q_2$ so dass

$$\begin{cases}\langle t_1v_1+P_1-t_2v_2-P_2,v_1\rangle=0\\ \langle t_1v_1+P_1-t_2v_2-P_2,v_2\rangle=0\end{cases}\iff\begin{pmatrix}\langle v_1,v_1\rangle & -\langle v_1,v_2\rangle\\ \langle v_1,v_2\rangle & -\langle v_2,v_2\rangle\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\langle P_1-P_2,v_1\rangle\\ \langle P_1-P_2,v_2\rangle\end{pmatrix}=0$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem für (t_1,t_2) mit eine einzige Lösung. Wir können das System lösen und die Punkte Q_1,Q_2 finden. Dann können wir auch die Abstand $d(L_1,L_2)=d(Q_1,Q_2)$ berechnen.

Beispiel 1.4.25. Wir betrachten die zwei Geraden $L_1=\{x=0,z=0\}=\langle(0,1,0)\rangle, L_2=\{z=1,x-y=0\}=\langle(1,1,0)\rangle+(0,0,1)$ in $\mathbb{R}^3$. Wir suchen $Q_1=(0,t_1,0), Q_2=(t_2,t_2,1)$ mit $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ so dass Q_1-Q_2 orthogonal zu $(0,1,0),(1,1,0)$ ist. Das bedeutet

$$0=\left\langle\begin{pmatrix}-t_2\\t_1-t_2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle=t_1-t_2$$
$$0=\left\langle\begin{pmatrix}-t_2\\t_1-t_2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle=t_1-2t_2$$

Die einzige Lösung ist $t_1=t_2=0$, so dass $Q_1=(0,0,0), Q_2=(0,0,1)$ und $d(L_1,L_2)=d(Q_1,Q_2)=1$.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 14.11.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Wenn man nur den Abstand zwischen zwei affine Unterräume finden will, und nicht die Punkte, die den Abstand berechnen, dann ist es einfacher:

Lemma 1.4.26. *Seien $M,N\subseteq\mathbb{R}^n$ nicht leere affine Unterräume mit assoziierte Untervektorräume M_0,N_0. Seien auch $P\in M, Q\in N$ beliebige Punkte. Dann*

$$d(M,N)=\|(P-Q)-\pi_{M_0+N_0}(P-Q)\|=\|\pi_{(M_0+N_0)^\perp}(P-Q)\|$$

wobei $\pi_{M_0+N_0}\colon\mathbb{R}^n\to(M_0+N_0)$ und $\pi_{(M_0+N_0)^\perp}\colon\mathbb{R}^n\to(M_0+N_0)^\perp$ die lineare orthogonale Projektionen sind.

Beweis. Seien $P'\in M, Q'\in N$ zwei Punkte so dass $L(P',Q')$ orthogonal zu beide M und N ist. Das bedeutet dass $P'-Q'\in M_0^\perp\cap N_0^\perp=(M_0+N_0)^\perp$. Wir wissen dass $P=P'+u, Q=Q'+w$ für $u\in M_0, w\in N_0$. Dann

$$d(M,N)=\|P'-Q'\|=\|\pi_{(M_0+N_0)^\perp}(P'-Q')\|=\|\pi_{(M_0+N_0)^\perp}(P-Q+u-w)\|=\|\pi_{(M_0+N_0)^\perp}(P-Q)\|$$

□

1.4.2 Isometrien

Definition 1.4.27 (Isometrie)**.** Eine Isometrie ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Abstände erhält:

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q) \qquad \text{für alle } P, Q \in \mathbb{R}^n$$

Die Menge aller Isometrien von $\mathbb{R}^n$ ist $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel 1.4.28. Translationen sind Isometrien. Die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ ist eine Isometrie und $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ ist auch eine Isometrie.

Bemerkung 1.4.29. Außerdem, die Komposition von Isometrien ist eine Isometrie, und, wenn eine Isometrie invertierbar ist, dann ist die Inverse auch eine Isometrie. Wir werden bald zeigen, dass jede Isometrie invertierbar ist, und dies wird beweisen, dass $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ eine Gruppe mit der Komposition ist.

Wir können alle Isometrien klassifizieren: wir erinnern uns an orthogonale Matrizen

Definition 1.4.30 (Orthogonale Matrizen, Orthogonale Gruppe)**.** Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist orthogonal, falls

$$\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle \qquad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^n$$

Das ist äquivalent zu $A^tA = I_n$.Die Menge aller orthogonale Matrizen ist die orthogonale Gruppe $O_n(\mathbb{R})$.

Bemerkung 1.4.31. Eine orthogonale Matrix hat Determinante $\det(A) = \pm 1$.

Definition 1.4.32 (Spezielle orthogonale Gruppe)**.** Die Menge aller orthogonale Matrizen mit Determinante 1 ist die spezielle orthogonale Gruppe $SO_n(\mathbb{R})$.

Satz 1.4.33. *Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine Isometrie genau dann, wenn sie eine affine Transformation $f = f_{A,v}$ ist, mit der Form*

$$f(x) = Ax + v, \qquad A \in O_n(\mathbb{R})$$

Beweis. Wir zeigen zuerst dass affine Transformationen mit der Form $f(x) = Ax+v, A \in O_n(\mathbb{R})$ Isometrien sind: seien $P, Q \in \mathbb{R}^n$, dann

$$d(f(P), f(Q)) = \|AP - AQ\| = \|A(P - Q)\| = \|P - Q\| = d(P, Q)$$

Andererseits, sei f eine Isometrie. Da die Komposition $t_{-f(0)} \circ f$ noch eine Isometrie ist, können wir annehmen dass $f(0) = 0$. Dann $\|f(v)\| = \|v\|$ für alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$. Seien nun $v, w \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren: wir sehen dass

$$2\langle f(v), f(w)\rangle = \|f(v)\|^2 + \|f(w)\|^2 - \|f(v) - f(w)\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v - w\|^2 = 2\langle v, w\rangle$$

so dass $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$. Wenn wir zeigen, dass f linear ist, sind wir fertig. Sei $v_1, \dots, v_n$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^n$. Die Vektoren $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sind auch eine orthonormale Basis, weil $\langle f(v_i), f(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$, wobei $\delta_{ij} = 0$ falls $i \neq j$ und $\delta_{ii} = 1$. Seien nun $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und sei $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. Da $f(v_1), \dots, f(v_n)$ eine orthonormale Basis von ist, wissen wir dass

$$f(v) = \sum_{i=1}^n \langle f(v), f(v_i)\rangle \cdot f(v_i) = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i\rangle \cdot f(v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i)$$

Das bedeutet dass f linear ist, und wir sind fertig. $\square$

Alternativer Beweis. Wir geben einen alternativen und mehr geometrischen Beweis, indem wir annehmen, dass $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare Isometrie ist. Wir wollen zeigen dass f affin ist, und die Idee ist den Fundamentalsatz der affinen Geometrie zu nutzen: wir müssen zeigen dass wenn $L \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Gerade ist, dann ist $f(L)$ auch eine Gerade. Wir zeigen zuerst dass wenn P, Q, R kollinear sind, dann sind $f(P), f(Q), f(R)$ auch kollinear: wir können annehmen dass R auf der Strecke $[P, Q]$ liegt. Dann

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q) = d(f(P), f(R)) + d(f(R), f(Q))$$

und das zeigt dass $f(R) \in [f(P), f(Q)]$. Sei nun L eine Gerade und seien $P, Q \in L$ verschiedene Punkte. Sei auch $L' = L(f(P), f(Q))$. Wir wissen dass wenn $R \in L$, dann $f(R) \in L(f(P), f(Q))$, so dass $f(L) \subseteq L'$. Da die inverse Abbildung f^{-1} auch eine invertierbare Isometrie ist, sehen wir dass $f^{-1}(L') \subseteq L$. Das bedeutet dass $f(L) = L'$ und das zeigt dass f affin ist. Dann können wir wie im vorherigen Beweis weitermachen. $\square$

Beispiel 1.4.34 (Spiegelungen)**.** Sei $H_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ eine lineare Hyperebene, d.h. ein Untervektorraum mit $\dim H_0 = n-1$. Dann $\dim H_0^\perp = 1$. Die Spiegelung mit Achse H_0 ist die Abbildung:

$$\sigma_{H_0}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad x \mapsto x - 2\pi_{H_0^\perp}(x) = -x + 2\pi_{H_0}(x) = \pi_{H_0}(x) - \pi_{H_0^\perp}(x) = x - 2\frac{\langle x, v_0\rangle}{\langle v_0, v_0\rangle} \cdot v_0$$

wobei $\pi_{H_0^\perp}\colon \mathbb{R}^n \to H_0^\perp, \pi_{H_0}\colon \mathbb{R}^n \to H_0$ die zwei lineare orthogonale Projektion sind und v_0 ein Erzeuger von $H_0^\perp$ ist. Diese Abbildung ist linear und wir sehen dass $\sigma_{H_0|H_0} = \mathrm{id}_{H_0}$ und $\sigma_{H_0|H_0^\perp} = -\mathrm{id}_{H_0^\perp}$: wenn $v_1, \dots, v_{n-1}$ eine orthonormale Basis von H_0 ist und v_0 eine orthonormale Basis von $H_0^\perp$ ist, dann ist $\mathcal{B} = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^n$ und

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma_{H_0}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Denn sieht man dass $\sigma_{H_0} \in O_n(\mathbb{R})$ und $\det \sigma_{H_0} = -1$. Zum Beispiel, betrachten wir die Gerade $L_0 = \{x - y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$: wir sehen dass $L_0^\perp = \langle (1, -1)\rangle$ so dass

$$\sigma_{L_0}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{x-y}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Sei nun $H \subseteq \mathbb{R}^n$ eine affine Hyperebene, mit assoziierte Untervektorraum H und sei $P \in H$ ein beliebiges Punkt. Die Spiegelung mit Achse H ist die affine Transformation $\sigma_H = t_P \circ \sigma_{H_0} \circ t_{-P}$:

$$\sigma_H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad x \mapsto \sigma_{H_0}(x - P) + P$$

Wir sehen dass

$$\sigma_{H_0}(x - P) + P = -x + P + 2\pi_{H_0^\perp}(x - P) + P = -x + 2\pi_{H_0^\perp, H_0}(x)$$

so dass die Abbildung unabhängig von P ist. Diese affine Transformation ist eine Isometrie weil sie die Komposition von Isometrien ist. Zum Beispiel, betrachten wir die Gerade $L = \{x - y = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$: die assoziierte Gerade durch 0 ist $L_0 = \{x - y = 0\}$, und $P = (1, 0) \in L$. Denn

$$\sigma_L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sigma_{L_0}\left(\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+1 \\ x-1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.4.35 (Drehungen)**.** Sei $\theta \in \mathbb{R}$. Die ebene lineare Drehung mit Winkel θ ist die lineare Abbildung

$$R_\theta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Es ist leicht zu überprüfen, dass $R_\theta \in SO_2(\mathbb{R})$. Für ein Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ können wir auch die Isometrie $R_\theta^P = t_P \circ R_\theta \circ t_{-P}$ betrachten:

$$R_\theta^P(x) = R_\theta(x - P) + P$$

Sie ist die ebene Drehung von Winkel θ um den Punkt P.

Ebene Isometrien

Wir haben verschiedene Arten von Ebene Isometrie schon gesehen: Translationen t_P , Drehungen um einen Punkt $t_P \circ R_\theta \circ t_{-P}$ und Spiegelungen σ_L. Eine andere Art von ebene Isometrie ist eine Gleitspiegelung, d.h. die Komposition einer Spiegelung mit einer Translation durch einen Vektor, der parallel zur Spiegelungsachse ist: $t_v \circ \sigma_L$ mit v, L parallel und $v \neq 0$.

Proposition 1.4.36 (Klassifikation von Ebene Isometrien)**.** *Jede ebene Isometrie $f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ ist eine Translation, eine Drehung, eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung.*

Beweis. Wir betrachten zuerst die lineare Isometrien: sei $A \in O_2(\mathbb{R})$. Wenn $A \in SO_2(\mathbb{R})$ dann kann man leicht zeigen, dass $A = R_\theta$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$. Wenn $\det(A) = -1$, dann $A' = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot A \in SO_2(\mathbb{R})$, so dass $A' = R_\theta$ für ein θ. Dann

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Insbesondere sehen wir, dass das charakteristisches Polynom von A ist $\chi_A(t) = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$. Das bedeutet, dass A diagonalisierbar ist: sei $L_0 = \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_2) \subseteq \mathbb{R}^2$ der Eigenraum für 1, so dass $A_{|L_0} = \mathrm{id}_{L_0}$ und $A_{|L_0^\perp} = -\mathrm{id}_{L_0^\perp}$. Das zeigt, dass A eine Spiegelung ist: $A = \sigma_{L_0}$. Wir haben gezeigt dass eine lineare Isometrie entweder eine Drehung oder eine Spiegelung ist:

$$O_2(\mathbb{R}) = \{\text{ lineare Drehungen }\} \sqcup \{\text{ lineare Spiegelungen }\}$$

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 19.11.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Eine allgemeine Isometrie $f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ ist der Komposition einer linearen Drehung oder eine linearen Spiegelung mit einer Translation. Sei R_θ eine lineare Drehung und sei $Q \in \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Komposition $t_Q \circ R_\theta$. Wenn $R_\theta = I_2$, dann $t_Q \circ R_\theta = t_Q$ ist eine Translation. Nehmen wir an, dass $R_\theta \neq I_n$. Wir sehen dass $t_Q \circ R_\theta$ ein Fixpunkt P hat, genau dann, wenn $R_\theta(P) + Q = P$, und das bedeutet $(I - R_\theta)P = Q$. Eine nicht-triviale Drehung R_θ hat kein Eigenvektor mit Eigenwert 1. Das bedeutet, dass $I - R_\theta$ invertierbar ist, so dass $P = (R_\theta - I)^{-1}(Q)$ ein Fixpunkt von $t_Q \circ R_\theta$ ist. Dann

$$(t_Q \circ R_\theta)(x) = R_\theta x + Q = R_\theta x - R_\theta P + P = R_\theta(x - P) + P = R_\theta^P(x)$$

so dass $t_Q \circ R_\theta = t_P \circ R_\theta \circ t_P = R_\theta^P$ eine Drehung um P ist.

Sei nun σ_{L_0} eine lineare Spiegelung. Wir betrachten die Komposition $t_Q \circ \sigma_{L_0}$. Diese Komposition hat ein Fixpunkt $P \in \mathbb{R}^2$ genau dann, wenn $P - 2\pi_{L_0^\perp}(P) + Q = P$, was bedeutet $2\pi_{L_0^\perp}(P) = Q$. So ein P existiert genau dann, wenn $Q \in L_0^\perp$ und in diesem Fall

$$(t_Q \circ \sigma_{L_0})(x) = x - 2\pi_{L_0^\perp}(x) + 2\pi_{L_0^\perp}(P) = \sigma_{L_0}(x - P) + P = \sigma_{L_0+P}(x)$$

so dass $t_Q \circ \sigma_{L_0} = \sigma_{L_0+P}$ eine Spiegelung ist. Wenn $Q \notin L_0^\perp$, dann können wir schreiben $Q = \pi_{L_0}(Q) + \pi_{L_0^\perp}(Q)$, mit $\pi_{L_0}(Q) \neq 0$, und wir sehen dass

$$t_Q \circ \sigma_{L_0} = t_{\pi_{L_0}(Q)} \circ (t_{\pi_{L_0^\perp}(Q)} \circ \sigma_{L_0}) = t_{\pi_{L_0}(Q)} \circ \sigma_{L_0+\pi_{L_0^\perp}(Q)}$$

eine Gleitspiegelung ist. □

Lineare Drehungen in drei Dimensionen

Sei $H_0 \subseteq \mathbb{R}^3$ eine lineare Ebene und sei $H_0^\perp$ die Gerade durch 0 die orthogonal zu H_0 ist. Die Drehung auf H_0 mit Winkel θ oder auch die Drehung um die Achse $H_0^\perp$ mit Winkel θ ist die Isometrie

$$R_{H_0,\theta} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

so dass $R_{H_0,\theta|H_0}$ eine Drehung mit Winkel θ ist und $R_{H_0,\theta|H_0^\perp} = \mathrm{id}_{H_0^\perp}$. Wenn v_1, v_2 eine orthonormale Basis von H_0 und v_3 eine orthonormale Basis von $H_0^\perp$ sind, dann ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$, und

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(R_{H_0,\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Insbesondere,sehen wir dass $R_{H_0,\theta} \in SO_3(\mathbb{R})$.

Beispiel 1.4.37. Sei $H_0 = \{x - y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$: eine orthonormale Basis von H_0 ist $v_1 = (0,0,1), v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ und eine orthonormale Basis von $H_0^\perp$ ist $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$. Denn ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$. Die Drehung $R_{H_0,\frac{\pi}{4}}$ hat die folgende Matrixdarstellung in der kanonische Basis $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$:

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(R_{H_0,\theta}) &= M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(R_{H_0,\theta}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Proposition 1.4.38. *Jede lineare spezielle Isometrie in $SO_3(\mathbb{R})$ ist eine Drehung um eine Gerade.*

Beweis. Sei $A \in SO_3(\mathbb{R})$. Das charakteristisches Polynom $\chi_A(t)$ hat Grad 3 so dass, es eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat. Das bedeutet dass A einen Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat, und da A orthogonal ist, sind die mögliche Eigenwerte ± 1: $Av = v$ oder $Av = -v$. Die Ebene $H_0 = \langle v \rangle^\perp$ ist auch A-invariant, so dass $A_{|H_0}$ entweder eine lineare Drehung oder eine lineare Spiegelung ist. Wenn $Av = v$, dann $\det(A_{|H_0}) = 1$ so dass $A_{|H_0}$ eine Drehung ist. Das zeigt dass A eine Drehung um die Gerade $\langle v \rangle$ ist. Wenn $Av = -v$, dann ist $\det(A_{|H_0}) = -1$ so dass $A_{|H_0}$ eine Spiegelung ist. Dann ist $A_{|H_0}$ diagonalisierbar durch eine orthonormale Basis von Eigenvektoren u, w so dass $Au = u$ und $Aw = w$. Wir wissen auch dass $Av = -v$, weil $\det(A_{|H_0}) = -1$. Wir sehen denn dass A die Drehung mit Winkel π um die Gerade $\langle u \rangle$ ist. □

In vielen praktischen Fällen ist es wichtig, Rotationen zu parametrisieren: zum Beispiel in der Luft- und Raumfahrt oder in Computerspielen. Ein klassischer Weg dazu sind die sogenannten Euler-Winkel: Sie besagen, dass jede Drehung eine Zusammensetzung aus drei Drehungen um die Koordinatenachse ist. Drehungen um diese Koordinatachsen haben die Form

$$R^x_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, R^y_\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}, R^z_\gamma = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.4.39. *Jede $A \in SO_3(\mathbb{R})$ ist ein Produkt $A = R^x_\alpha \cdot R^y_\beta \cdot R^z_\gamma$ für manche α, β, γ.*

Beweis. Wir bemerken zuerst eine Eigenschaft von ebene Drehungen: für jeden Vektor $w \in \mathbb{R}^2, w \neq 0$ und jede Gerade $L_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ durch 0 können wir eine ebene Drehung R_θ finden so dass $R_\theta w \in L$. Das ist geometrisch klar und wir lassen ein Beweis mit Formeln als Hausaufgabe.

Sei nun $v = (v_x, v_y, v_z)^t \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor mit Norm $\|v\| = 1$. Wir können eine Drehung $R^x_{\alpha'}$ um die x-Achse finden so dass $R^x_{\alpha'} v \in \{y = 0\}$: es reicht α' zu finden, so dass die Ebene Drehung mit Winkel α' den Vektor $(v_y, v_z)^t$ in der Gerade $\{y = 0\}$ bringt. Mit eine ähnliche Begründung können wir β' finden so dass $R^y_{\beta'} R^x_{\alpha'} v \in \{x = 0\}$, und dann $R^y_{\beta'} R^x_{\alpha'} v \in \{x = y = 0\}$. Wir haben $\|R^y_{\beta'} R^x_{\alpha'} v\| = \|v\| = 1$, so dass $R^y_{\beta'} R^x_{\alpha'} v = e_3$ oder $R^y_{\beta'} R^x_{\alpha'} v = -e_3$. Im zweiten Fall, können wir eine Drehung R^y_π anwenden, so dass $R^y_\pi R^y_{\beta'} R^x_{\alpha'} v = R^y_{\pi+\beta'} R^x_{\alpha'} v = e_3$.

Sei nun $A \in SO_3(\mathbb{R})$: Mit dem vorherigen Verfahren, können wir α', β' finden so dass die dritte Spalte von $R^y_{\beta'} R^x_{\alpha'} A$ der Vektor e_3 ist. Wir haben im Beweis von der Proposition 1.4.38 gesehen, dass $R^y_{\beta'} R^x_{\alpha'} A$ eine Drehung um die z-Achse ist: $R^y_{\beta'} R^x_{\alpha'} A = R^z_\gamma$ für ein γ. Dann $A = R^x_{-\alpha'} R^y_{-\beta'} R^z_\gamma$. □

Das bedeutet dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to SO_3(\mathbb{R}), \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto R^x_\alpha \cdot R^y_\beta \cdot R^z_\gamma$$

surjektiv ist: sie ist eine Parametetrisierung von $SO_3(\mathbb{R})$. Diese Parametrisierung hat jedoch einige Nachteile, die in der Praxis zu Problemen führen: die so genannte "Gimbal-Lock". Dies geschah tatsächlich während der Apollo 11-Mission! Auf Wikipedia finden Sie mehr darüber.

Mathematisch lässt sich ein Beispiel für Gimbal-Lock wie folgt darstellen: sei $\alpha \in \mathbb{R}$, dann

$$R^x_\alpha \cdot R^y_{-\frac{\pi}{2}} \cdot R^z_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und das ist unabhängig von α. So kann sich α in einem eindimensionalen Raum $\mathbb{R}$ bewegen, aber dieser eindimensionale Raum wird durch die Parametrisierung auf einen einzigen Punkt zusammengezogen. Dieses Problem wird nicht dadurch gelöst, dass man eine andere Parametrisierung mit Winkeln wählt: es kann gezeigt werden, dass jede Parametrisierung von $SO_3(\mathbb{R})$ mit Winkeln diese Art von Verhalten zeigt: es hängt von der Topologie von $SO_3(\mathbb{R})$ ab.

Um dieses Problem zu vermeiden, bräuchte man eine Möglichkeit, $SO_3(\mathbb{R})$ ohne Winkel zu parametrisieren. Es gibt einen Weg, dies zu tun, der durch ein überraschendes mathematisches Konzept gegeben ist: die Quaternionen.

Sie haben ihren Ursprung in der reinen Mathematik, werden aber heute bei der Programmierung von Videospielen und bei der Beförderung von Raketen ins All verwendet. Wir werden etwas über Quaternionen gegen Ende des Kurses sehen, je nach Zeit [2].

1.4.3 Volumen

In der Analysis sieht man, dass das Volumen einer hinreichend schönen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\mathrm{Vol}(D) = \int_D 1 \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Ist $D \subseteq \mathbb{R}$, so nennt man dies die Länge von D, ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$, so nennt man dies die Flächeninhalt von D. Was bedeutet"hinreichend schön"? Das hängt von der Integrationstheorie ab, die wir wählen. Wenn wir das Riemannsche Integral wählen, dann können wir D als eine begrenzte Teilmenge D betrachten, deren Rand ∂D das Maß Null hat. Wenn wir das Lebesgue-Integral wählen, können wir D als eine beliebige messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ betrachten. Das ist für uns nicht sehr wichtig, da wir uns auf sehr schöne Fälle beschränken werden: einer davon sind n-Parallelogramme

Definition 1.4.40 (n-Parallelogramm)**.** Seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Das durch diese Vektoren definierte n-Parallelogramm ist

$$P(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{t_1 v_1 + \dots + t_n v_n \,|\, t_i \in [0,1]\}$$

Beispiel 1.4.41. Das Parallelogram von den kanonische Basisvektoren $e_1, \dots, e_n$ ist

$$P(e_1, \dots, e_n) = \{(t_1, \dots, t_n) \,|\, t_i \in [0,1]\} = [0,1]^n$$

Wir wissen dass $\mathrm{Vol}([0,1]^n) = 1$.

Lemma 1.4.42. *Seien $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Das Volumen vom n-Parallelogram $P(v_1, \dots, v_n)$ ist*

$$\mathrm{Vol}(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(v_1|\dots|v_n)|$$

Hier ist $(v_1|\dots|v_n)$ die Matrix, die die v_i als Spaltenvektoren hat.

Beweis. Sei $A = (v_1|\dots|v_n)$. Wenn $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig sind, dann ist $\det(v_1|\dots|v_n) = 0$. Wir sehen auch dass $P(v_1, \dots, v_n)$ in dem echten Untervektorraum $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ enthalten ist, und da $\mathrm{Vol}(V) = 0$, sehen wir dass $\mathrm{Vol}(P(v_1, \dots, v_n)) = 0$.

Wenn $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind, dann ist A invertierbar, und wir sehen dass $P = P(v_1, \dots, v_n) = A([0,1]^n)$. Dann zeigt der Transformationssatz für Integrale dass

$$\mathrm{Vol}(P) = \int_{A([0,1]^n)} 1 dx_1 \dots dx_n = \int_{[0,1]^n} |\det A| dx_1 \dots dx_n = |\det A| \cdot \int_{[0,1]^n} dx_1 \dots dx_n = |\det A|.$$

□

[2] wir sammeln coole Sachen, die wir am Ende des Kurses zeigen wollen, also ist es sehr empfehlenswert, bis zum Ende zu bleiben

Mit der Transformationsformel für Integrale können wir auch Folgendes beweisen:

Lemma 1.4.43. *Sei $f(x) = Ax + v$ eine affine Transformation $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$. Diese Transformation erhält die Volumina nur dann, wenn $|\det A| = 1$.*

Beweis. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein hinreichend schöner Integrationsbereich, wie zuvor beschrieben. Unter Verwendung des Transformationssatzes für Integrale sehen wir wie zuvor, dass

$$\mathrm{Vol}(f(D)) = |\det A| \cdot \mathrm{Vol}(D)$$

so dass, wenn $|\det A| = 1$, denn $\mathrm{Vol}(f(D)) = \mathrm{Vol}(D)$. Andererseits, nehmen wir D so dass $\mathrm{Vol}(D) \neq 0$ (z.B. $D = [0,1]^n$): wenn $\mathrm{Vol}(f(D)) = \mathrm{Vol}(D)$, denn $|\det A| = 1$. □

Remark 1.4.44. Insbesondere erhalten Isometrien Volumina.

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ **Ende Vorlesung 21.11.2024** ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

Umfang und Flächeninhalt von Polygone

Wir beschränken uns nun auf Polygone in zwei Dimensionen. Ein Polygon ist eine zweidimensionale Figur, die durch einen geschlossenen Streckenzug erhalten wird. Wir geben eine formale Definition:

Definition 1.4.45 (Polygon)**.** Ein Polygon ist gegeben durch eine Folge von mindestens 3 geordneten und paarweise verschiedenen Punkten $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$, so dass keine drei aufeinanderfolgenden Punkte kollinear sind (Wir betrachten hier P_{n-1}, P_n, P_1 und P_n, P_1, P_2 als aufeinanderfolgende Punkte). Wir setzen außerdem voraus, dass sich die Segmente $[P_1, P_2], \dots, [P_{n-1}, P_n], [P_n, P_1]$ höchstens in den Punkten P_i treffen.

Die Punkte P_i sind die Ecken der Polygone und die Strecken $[P_1, P_2], \dots, [P_n, P_{n+1}]$ sind die Seiten des Polygons. Der Winkel des Polygons an einem Scheitelpunkt P_i ist der Winkel zwischen den beiden Vektoren $P_{i-1} - P_i, P_{i+1} - P_i$.

Definition 1.4.46 (Umfang und Flächeninhalt eines Polygons)**.** Sei A ein Polygon mit Ecken $P_1, \dots, P_n$. Der Umfang von P ist

$$P(A) = d(P_1, P_2) + \cdots + d(P_{n-1}, P_n) + d(P_n, P_1)$$

Sei S die Vereinigung aller Seiten des Polygons. Dann kann man zeigen, dass $\mathbb{R}^2 \subseteq S$ aus zwei zusammenhängenden Komponenten besteht, einer beschränkten und einer unbeschränkten. Der Flächeninhalt $F(A)$ von A ist der Flächeninhalt der begrenzten Region.

Bemerkung 1.4.47. Die Tatsache, dass S die Ebene in zwei Regionen trennt, eine begrenzte und eine unbegrenzte, ist ein Spezialfall des Jordan-Kurvensatzes. Wir werden ihn in unserem Kurs nicht beweisen.

Beispiel 1.4.48 (Dreieck)**.** Ein Dreieck ist ein Polygon T mit drei Ecken $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), P_3 = (x_3, y_3)$. Diese Ecken sind drei nicht-kollineare Punkte. Der Umfang von T ist

$$P(T) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) + d(P_2, P_3)$$

Die typische Methode zur Berechnung den Flächeninhalt von T ist die klassische Formel

$$F(T) = \frac{1}{2} d(P_1, P_2) \cdot d(P_3, L(P_1, P_2))$$

Dabei ist $d(P_1, P_2)$ die Länge einer Seite des Dreiecks und $d(P_3, L(P_1, P_2))$ der Abstand von der gegenüberliegender Ecke der Gerade, die von dieser Seite aufgespannt wird. Die Fläche von T ist auch die Hälfte der Fläche der Parallelogramme $P(P_1 - P_3, P_2 - P_3)$ ist:

$$F(T) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix} \right|$$

aber wir könnten auch die Parallelogramme $P(P_1 - P_2, P_3 - P_2)$ oder $P(P_2 - P_1, P_3 - P_1)$ betrachten.

Nun wollen wir folgende Frage stellen: Wir betrachten alle Dreiecke mit einem festen Umfang s. Können wir die Dreiecke mit der größten Fläche finden? Dies ist das erste Beispiel für das isoperimetrische Problem, ein klassisches und wichtiges Problem in der Mathematik. Bei dieser Art von Problemen ist die Lösung tendenziell symmetrisch, wie es auch in diesem Fall der Fall ist. Ein Dreieck heißt gleichseitig, wenn alle Seiten gleich lang sind.

Satz 1.4.49. *Ein gleichseitiges Dreieck hat von allen Dreiecken mit gleichem Umfang die größte Fläche*

Beweis. Sei $s > 0$ und sei T ein Dreieck mit die größte Fläche, von allen Dreiecken mit Umfang s. Seien A, B, C die Ecken von T. Es reicht zu zeigen dass die Länge von jede zwei Seiten gleich sein müss, wenn die Länge der verbleibenden Seite festgelegt ist. Durch eine mögliche Umbenennung der Punkte genügt es zu zeigen, dass $d(A, C) = d(B, C)$, wenn $d = d(A, B)$ festgelegt ist.

Über eine Translation können wir annehmen, dass $A = (-\frac{d}{2}, 0)$, anschließend über eine Rotation können wir annehmen, dass $B = (\frac{d}{2}, 0)$ und schließlich bis zu einer möglichen Spiegelung, können wir annehmen, dass $C = (x, y)$ mit $x \in \mathbb{R}, y > 0$. Da es sich dabei alles um Isometrien handelt, ändern wir die Flächeninhalten und Umfänge nicht. Der Flächeninhalt von T ist

$$F(T) = \frac{1}{2} d \cdot y$$

Und wenn wir die Gleichung $d(A, C) + d(B, C) = s - d$ quadrieren, sehen wir dass

$$\begin{aligned}(s-d)^2 &= \|(x + \frac{d}{2}, y)\|^2 + \|(x - \frac{d}{2}, y)\| = (x + \frac{d}{2})^2 + y^2 + (x - \frac{d}{2})^2 + y^2 \\ &= x^2 + \frac{d^2}{4} + dx + x^2 + \frac{d^2}{4} - dx + 2y^2 \\ &= 2x^2 + 2y^2 + \frac{d^2}{2}\end{aligned}$$

Und das bedeutet dass $y^2 + x^2 = c$, wobei $c = \frac{1}{2}((s-d)^2 - \frac{d^2}{2})$ konstant ist. Da $F(T)$ maximal ist, müssen wir y maximieren, und das bedeutet y^2 maximieren. Da $y^2 = c - x^2$, sehen wir dass y maximal ist, genau dann, wenn $x = 0$. Das bedeutet insbesondere dass $d(A, C) = d(B, C)$.

Jetzt sind wir fast fertig. Warum sind wir noch nicht fertig? Wir haben den Beweis mit der Annahme begonnen, dass ein Dreieck mit maximaler Fläche existiert, und dann bewiesen, dass dieses Dreieck gleichseitig sein muss. Jetzt müssen wir zeigen, dass ein Dreieck mit maximaler Fläche existiert: Dies wird durch das nächste Lemma erledigt. □

Lemma 1.4.50. *Unter allen Dreiecken mit festem Umfang gibt es eines mit der größten Fläche.*

Beweis. Dieser Beweis ist interessant, weil wir nicht zeigen werden, wie man das Dreieck mit maximaler Fläche konstruiert, sondern nur, dass eines existiert. Aber wir müssen es nicht konstruieren: Sobald wir wissen, dass es eines gibt, zeigt der vorherige Beweis, dass es gleichseitig ist.

Erstens können wir uns durch eine Translation auf alle Dreiecke mit einer Ecke im 0 beschränken. Wir können alle diese Dreiecke durch die Menge

$$S = \{(0, B, C) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid d(0, B) + d(0, C) + d(B, C) = s\}$$

parametrisieren, wobei s der gemeinsamer Umfang ist von alle den Dreiecken ist. Diese Menge is abgeschlossene, weil die Funktion $(0, A, B) \mapsto d(0, B) + d(0, C) + d(B, C)$ stetig ist. Außerdem ist diese Menge auch beschränkt, weil $d(0, B), d(0, C) \leq s$. Das bedeutet dass S kompakt ist. Wir betrachten nun die Flächeninhalt Funktion:

$$F : S \to \mathbb{R}, \qquad (0, B, C) \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{Vol}(P(B, C))$$

wobei $P(B, C)$ der Parallelogram von B und C ist. Wir wissen dass $F(B, C) = 0$ falls $0, B, C$ kollinear sind, und dass $F(B, C)$ die Fläche des Dreiecks $0, B, C$ ist, falls $0, B, C$ nicht kollinear sind. Das Volumen von $P(B, C)$ wird durch den Betrag einer Determinante angegeben, und die Determinante ist eine Polynomfunktion. Dies zeigt, dass F stetig ist. Dann hat F ein Maximum auf der Menge S.

Abschließend müssen wir nur beweisen, dass F ein Maximum in einem Dreieck hat. Aber wenn F ein Maximum hat, bei dem $0, B, C$ kollinear sind, dann ist das Maximum von F Null, sodass F Null sein muss. Dies ist jedoch unmöglich, da beispielsweise das gleichseitige Dreieck mit dem Umfang s eine Fläche ungleich Null hat. □

In sehr ähnlicher Weise kann man die folgende Verallgemeinerung beweisen:

Definition 1.4.51 (Regelmäßiges Polygon)**.** Ein regelmäßiges Polygon ist ein Polygon, dessen Seiten alle die gleiche Länge haben und dessen Winkel an jedem Eckpunkt gleich sind

Satz 1.4.52. *Ein regelmäßiges Polygon hat die maximale Fläche aller Polygone mit einer festen Anzahl von Seiten und einem festen Umfang.*