Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
D. Agostini, C. Nollau

Geometrie
WS 2024/25

Blatt 6

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 03.12, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 6.1 (15 Punkte) Sei $n \geq 2$. Sei $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, A \in GL_n(\mathbb{R})$ eine lineare Transformation. Wir sagen dass A winkeltreu ist, wenn der Winkel zwischen v, w und der Winkel zwischen Av, Aw für zwei beliebige Vektoren v, w in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gleich ist. Das bedeutet:

$$\frac{\langle Av, Aw\rangle}{\|Av\|\|Aw\|} = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|} \qquad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Zeigen Sie, dass die folgende Aussage äquivalent sind:

(a) A ist winkeltreu.

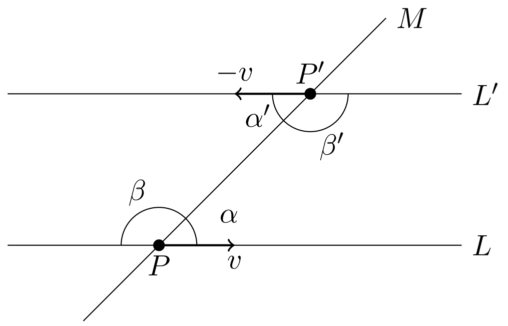
(b) A erhaltet die Orthogonalität: wenn $\langle v, w\rangle = 0$, dann $\langle Av, Aw\rangle = 0$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$.

(c) Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ und eine orthonormale Basis $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ so dass $\langle Av_i, Av_j\rangle = \lambda^2 \cdot \langle v_i, v_j\rangle$ für alle i, j. [*Hinweis:* Betrachten Sie die Vektoren $v_i + v_j, v_i - v_j$]

(d) $A = \lambda B$ wobei $\mu \in \mathbb{R}^\times$ und $B \in O_n(\mathbb{R})$.

Aufgabe 6.2 (10 Punkte) Sei $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung mit Winkel $\frac{\pi}{3}$ um die Gerade $L = \langle(1,1,1)\rangle = \{(t,t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Finden Sie die Matrix $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(R)$,bezüglich die kanonische Basis $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ von $\mathbb{R}^3$.

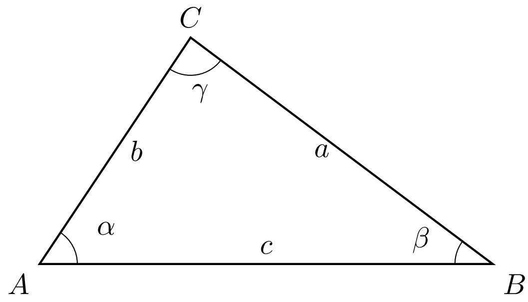
Aufgabe 6.3 (2 + 2 + 5 + 6 Punkte) Seien $L, L' \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei parallele Geraden, mit assoziierten Untervektorraum $L_0 = \langle v\rangle$. Sei auch M eine Gerade die nicht parallel zu L und L' ist und seien $P = L \cap M, P' = L' \cap M$. Seien α der Winkel zwischen v und $P' - P$, β der Winkel zwischen $P' - P$ und $-v$. Seien auch α' der Winkel zwischen $P - P'$ und $-v$ und β' der Winkel zwischen $P - P'$ und v.



(i) Nutzen Sie unsere Definition von Winkeln und zeigen Sie, dass $\alpha + \beta = \pi$.

(ii) Nutzen Sie unsere Definition von Winkeln und zeigen Sie, dass $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$.

Wir betrachten nun ein Dreieck mit Ecken A, B, C. Seien α der Winkel zwischen die Vektoren $B - A, C - A$, dann β der Winkel zwischen die Vektoren $A - B, C - B$ und endlich γ der Winkel zwischen die Vektoren $A - C, B - C$:



(iii) Nutzen Sie unsere Definition von Winkeln und zeigen Sie, dass $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Seien nun $a = \|B - C\|, b = \|A - C\|, c = \|A - B\|$.

(iv) Zeigen Sie den Kosinussatz:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$