Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
D. Agostini, C. Nollau

Geometrie
WS 2024/25

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Blatt 5

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 26.11, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 5.1 (1 + 1 + 8 + 2 + 4 Punkte) Seien $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ Vektoren. Die Gramsche Matrix von diesen Vektoren ist die Matrix $M = (\langle v_i, v_j \rangle)$. Die Gramsche Determinante ist $\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_k) = \det M$. Die ersten beiden Punkte sind Wiederholungen aus der linearen Algebra.

(i) Seien $x = \sum_{i=1}^{k} x_i v_i, y = \sum_{i=1}^{k} v_i$ mit $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \langle x, y \rangle$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Gramsche Matrix symmetrisch und positiv definit ist. Zeigen Sie auch, dass die Matrix positiv definit ist, genau dann, wenn die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig sind. Insbesondere $\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_k) \geq 0$ für alle $v_1, \ldots, v_k$, und die Gleichung gilt, genau dann, wenn die Vektoren linear abhängig sind.

(iii) Nehmen wir an dass die $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig sind und sei $V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ der Untervektorraum, der von den v_i erzeugt ist. Sei $\pi_{V^\perp} \colon \mathbb{R}^n \to V^\perp$ die lineare orthogonale Projektion ist und Sei $u \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{Gram}(u, v_1, \ldots, v_k)}{\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_k)} = \frac{\mathrm{Gram}(\pi_{V^\perp}(u), v_1, \ldots, v_k)}{\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_k)} = \|\pi_{V^\perp}(u)\|^2$$

[Hinweis: Vorschlag: Versuchen Sie, auf die Situation zu kommen, in der $u = \pi_{V^\perp}(u)$.]

(iv) Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leere affine Unterräume mit assoziierte Untervektorräume M_0, N_0. Seien auch $P \in N, Q \in M$ beliebige Punkte und $v_1, \ldots, v_k$ eine Basis von $M_0 + N_0$. Zeigen Sie, dass

$$d(M, N)^2 = \frac{\mathrm{Gram}(u, v_1, \ldots, v_k)}{\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_k)}$$

(v) Betrachten Sie die zwei Geraden $M = \{(t+1, t, t-4, t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ und $N = \{(t, 2t+3, t+1, -t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. Finden Sie die Abstand $d(M, N)$.

Aufgabe 5.2 (3 + 7 + 0 Punkte)

(i) Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$, und sei $A \in GL_n(\mathbb{R})$ so dass $\langle Av_i, Av_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$ für alle i, j. Zeigen Sie dass A orthogonal ist.

(ii) Seien $P_1, \ldots, P_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ und $Q_1, \ldots, Q_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ Punkte in allgemeiner linearen Lage. Zeigen Sie dass die Folgende Aussage äquivalent sind:

(a) Es gibt eine Isometrie $f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$, so dass $f(P_i) = Q_i$ für alle $i = 1, \ldots, n+1$.

(b) Es gilt $d(P_i, P_j) = d(Q_i, Q_j)$ für alle $1 \leq i, j \leq n+1$.

(c) Es gilt dass $d(P_i, P_{n+1}) = d(Q_i, Q_{n+1})$ für alle $i = 1, \ldots, n$, und dass der Winkel zwischen $P_i - P_{n+1}, P_j - P_{n+1}$ und der Winkel zwischen $Q_i - Q_{n+1}, Q_j - Q_{n+1}$ gleich sind, für alle $1 \leq i < j \leq n$.

(iii) Wenn $n = 2$, können Sie Punkt (ii) im Sinne des Kongruenzsatzes für Dreiecke interpretieren, den man in der Schule lernt? Sie brauchen Ihre Antwort hier nicht aufzuschreiben.

Aufgabe 5.3 (2 + 8 + 4 Punkte)

(i) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $f \in \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n)$ eine affine Transformation. Zeigen Sie, dass die Menge von Fixpunkte $\mathrm{Fix}(f) = \{P \in \mathbb{K}^n \mid f(P) = P\}$ ein affiner Unterraum ist.

(ii) Sei $f \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^2)$ eine ebene Isometrie, mit der Form $f(x) = Ax + v$. Nehmen wir an, dass $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}
f \text{ ist eine Translation} &\iff \det(A) = 1, \mathrm{Fix}(f) = \emptyset \\
f \text{ ist eine Drehung} &\iff \det(A) = 1, \mathrm{Fix}(f) \text{ ist ein Punkt.} \\
f \text{ ist eine Spiegelung} &\iff \det(A) = -1, \mathrm{Fix}(f) \text{ ist eine Gerade.} \\
f \text{ ist eine Gleitspiegelung} &\iff \det(A) = -1, \mathrm{Fix}(f) = \emptyset
\end{aligned}$$

(iii) Betrachten Sie die Punkte $P_1 = (1,1), P_2 = (3,1), P_3 = (1,2)$ in linearen allgemeiner Lage und die Punkte $Q_1 = (-1,0), Q_2 = (-3,0), Q_3 = (-1,-1)$ in linearen allgemeiner Lage. Sei $g \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ die einzige affine Transformation so dass $g(P_i) = Q_i$ für $i = 1,2,3$. Zeigen Sie, dass g eine Isometrie ist und bestimmen Sie ob g eine Translation, eine Drehung, eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung ist.
